

# **Kritisches Verhalten und Niederfrequenz-Anomalien beim Quanten-Hall-Effekt**

**Berndt M. Gammel**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik  
der Technischen Universität München zur Erlangung des  
akademischen Grades eines

**Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)**

genehmigten Dissertation

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. G. Abstreiter  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. W. Brenig  
2. Univ.-Prof. Dr. S. Fischer

Die Dissertation wurde am 24.11.1994 bei der  
Technischen Universität München eingereicht und durch die  
Fakultät für Physik am 16.12.1994 angenommen.



*Für Müpfling*

吳  
吳  
禮  
廟  
申



*Herzlich danken möchte ich Herrn Prof. Dr. W. Brenig, der diese Arbeit angeregt und gefördert hat. In den Gesprächen und Diskussionen mit ihm, zu denen er immer und jederzeit bereit war, habe ich viel gelernt.*

*Die enge Zusammenarbeit mit meinem Mitstreiter in der Quanten-Hall-Gruppe, Ferdinand Evers, hat sicher viel zum Entstehen neuer Ideen und dem Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ebenso möchte ich mich natürlich auch bei Peter Kratzer, unserem „Schiedsrichter“ in allen Streitfragen, besonders bedanken.*

*Wertvoll waren auch stets die Gespräche mit Herrn Prof. K. Wysokiński, der leider immer nur kurz zu Gast bei uns war.*

*Pierre Yogeshwar hat dazu beigetragen mich von der Faszination des Themas zu überzeugen, so daß ich nicht umhin konnte, mich in diese Arbeit zu stürzen.*

*Nicht zu unterschätzen ist die anregende und angenehme Atmosphäre, zu der die Mitglieder unserer Oberflächen-Gruppe, Ralf Russ, Thomas Brunner, Christopher Haug, Stefan Küchenhoff und Herbert Müller, durch unzählige Gespräche über physikalische und weltliche Dinge beigetragen haben.*

*Natürlich bedanke ich mich auch bei meiner Frau Susi für die moralische und korrigierende Hilfe, und nicht zuletzt bei unserem kleinen Andreas der vor allem auch zur Ablenkung und Zerstreuung (Papier usw.) beigetragen hat.*



# Inhaltsverzeichnis

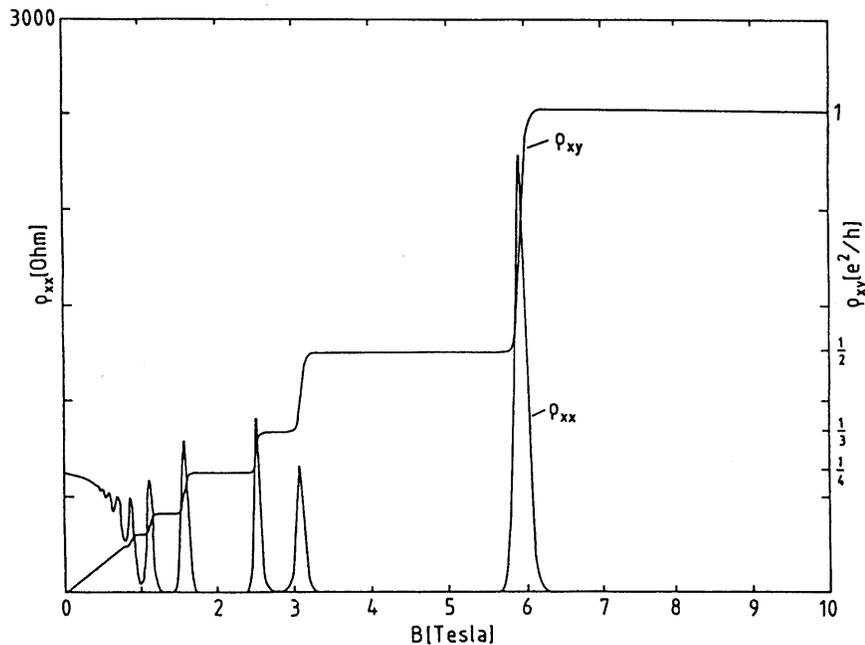
<b>1</b>	<b>Einleitung und Übersicht</b>	<b>9</b>
1.1	Einführung . . . . .	10
1.2	Kapitelübersicht . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Korrelationsfunktionen im Linearen Response</b>	<b>14</b>
2.1	Darstellung durch Resolventen . . . . .	15
2.2	Elimination von Zeitableitungen . . . . .	17
2.3	Die dynamische Leitfähigkeit . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Die Green-Funktions-Rekursionsmethode für die dynamische Leitfähigkeit</b>	<b>19</b>
3.1	Prinzip der Methode . . . . .	20
3.2	Die Zustandsdichte . . . . .	21
3.3	Die dynamische Leitfähigkeit . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Modellrechnungen zum eindimensionalen Anderson-Modell</b>	<b>26</b>
4.1	Das eindimensionale Anderson-Modell . . . . .	26
4.2	Ergebnisse der Modellrechnungen . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Multifraktalität</b>	<b>34</b>
5.1	Die fraktalen Dimensionen . . . . .	34
5.2	Das Spektrum eines Multifraktals . . . . .	36
5.3	Multifraktale beim Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang . . . . .	38
5.3.1	Zusammenhang mit den Exponenten der Korrelationslänge $\nu$ und der inversen Besetzungszahl $\pi_q$ . . . . .	39
5.3.2	Zusammenhang mit dem Exponenten der anomalen Diffusion $\eta$	40
<b>6</b>	<b>Modellrechnungen zum zweidimensionalen Magnetotransport</b>	<b>41</b>
6.1	Das Random-Matrix-Modell . . . . .	41

6.2	Die Zustandsdichte . . . . .	44
6.2.1	Analytische Modelle . . . . .	44
6.2.2	Numerische Rechnungen . . . . .	45
6.3	Die Leitfähigkeit bei kurzreichweitigen Potentialen . . . . .	49
6.3.1	Das Skalenverhalten der statischen Leitfähigkeit . . . . .	49
6.3.1.1	Der kritische Exponent $\nu$ . . . . .	49
6.3.1.2	Der kritische Exponent $\eta'$ . . . . .	53
6.3.1.3	Der Leitfähigkeitsfixpunkt . . . . .	55
6.3.1.4	Das Fehlen mesoskopischer Leitwertfluktuationen . . . . .	56
6.3.2	Das Skalenverhalten der dynamischen Leitfähigkeit . . . . .	58
6.3.2.1	Anomale Diffusion . . . . .	58
6.3.2.2	Der Leitfähigkeitsfixpunkt . . . . .	61
6.4	Die Leitfähigkeit bei langreichweitigen Potentialen . . . . .	62
6.4.1	Semiklassische Theorie der Long-Time-Tails . . . . .	62
6.4.2	Resultate der quantenmechanischen Rechnung . . . . .	65
6.4.2.1	Long Time Tails . . . . .	65
6.4.2.2	Der universelle Leitfähigkeitsfixpunkt . . . . .	69
6.4.2.3	Das Skalenverhalten der dynamischen Leitfähigkeit . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Modellrechnungen zum zweidimensionalen Magnetotransport mittels der streutheoretischen Methode</b>	<b>75</b>
7.1	Die streutheoretische Methode . . . . .	75
7.2	Das Random-Potential . . . . .	77
7.3	Multifraktale Analyse der Wellenfunktionen . . . . .	81
7.4	Die Statische Leitfähigkeit . . . . .	83
7.5	Der Hall-Winkel . . . . .	86
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>88</b>
<b>A</b>	<b>Hinweise zur numerischen Lösung der Gleichungen von Berezinskiĭ</b>	<b>91</b>
<b>B</b>	<b>Hinweise zur Numerik</b>	<b>92</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>93</b>

# 1

## Einleitung und Übersicht

**E**dwin Herbert Hall<sup>60</sup> veröffentlichte 1879 seine Ergebnisse über das Verhalten eines stromdurchflossenen Leiters unter dem Einfluß eines Magnetfeldes. Ziemlich genau hundert Jahre später konnte Klaus von Klitzing<sup>87</sup> in der Nacht vom 4. zum 5. Februar 1980 im Hochfeldlabor von Grenoble bei Tieftemperaturmessungen an Si-MOSFETs ausgeprägte Stufen (Plateaus) im Hall-Widerstand  $\rho_{xy}$  als Funktion des Magnetfeldes beobachten. Er erkannte, daß diese als Effekt einer offenbar *exakten* Quantisierung bei ganzzahligen Vielfachen der Konstante  $e^2/h$  in der Hall-Leitfähigkeit liegen. Diese Kombination zweier Naturkonstanten hat in zwei Raumdimensionen gerade die physikalische Dimension des inversen Widerstandes. Die longitudinale (diagonale), dissipative Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  und der longitudinale Widerstand  $\rho_{xx}$  verschwinden gleichzeitig im Plateau-Bereich. Zwischen den Plateaus zeigen  $\sigma_{xx}$  und  $\rho_{xx}$  scharfe Peaks (Abbildung).



**Abbildung 1.1:** Typisches Bild des Quanten-Hall-Effekts, beobachtet bei einer GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Heterostruktur mit geringer Beweglichkeit ( $\mu = 52000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ ) bei einer Temperatur von  $T = 66 \text{ mK}$ .<sup>59</sup>

## 1.1 Einführung

Da der Quanten-Hall-Effekt mittlerweile zum Lehrbuchstoff geworden ist und auch schon Einzug in Praktikumsversuche gehalten hat, wird hier nur noch auf die Aspekte eingegangen, die als Hintergrund für diese Arbeit wichtig sind.

Artikel über die Entdeckungsgeschichte<sup>101</sup>, ausführliche Monographien<sup>80, 138</sup>, Sammlungen von Aufsätzen<sup>48, 102, 103</sup>, umfangreiche Reviews<sup>7, 88, 17</sup> und regelmäßige Berichte über den Stand der Dinge<sup>58, 59</sup> verdeutlichen den Umfang der wissenschaftlichen Arbeiten zu diesem Thema. Leider existiert auch heute, vierzehn Jahre nach der Entdeckung, noch keine mikroskopische oder phänomenologische Theorie, die *alle* in Abbildung 1.1 gezeigte Beobachtungen erklären könnte.

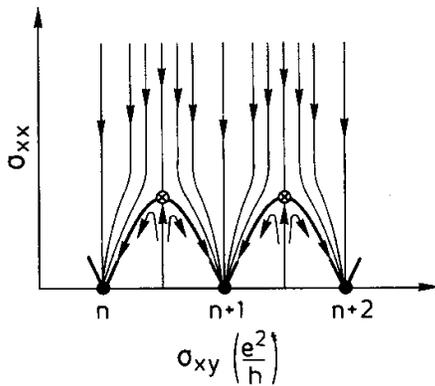
Dennoch wurde vom „Bureau International des Poids et Mesures“ die von-Klitzing-Konstante  $R_{K-90} = 25812.807 \Omega$  ( $\pm 0.2 \text{ ppm}$ ) ab dem 1. Januar 1990 als das internationale Widerstandsnormale empfohlen. Präzisionsmessungen<sup>62</sup> bestätigten mit einer  $1\sigma$ -Meßunsicherheit von nur noch  $\pm 3.5 \times 10^{-10}$ , d. h.  $\pm 9.03 \mu\Omega$ , daß der quantisierte Hall-Widerstand eine universelle, von Material (Si-MOSFET bzw. AlGaAs/GaAs-Heterostruktur) und Landau-Niveau unabhängige Größe darstellt. Die Identität  $R_K = h/e^2$  ist deshalb mit großer Wahrscheinlichkeit exakt gültig. Finite-Size Korrekturen zu den Plateaus sind maximal von der Größenordnung<sup>26</sup>  $(\ell^2/L_x L_y)^2$ , wobei  $\ell$  die magnetische Länge und  $L_x \times L_y$  die Ausdehnung der Probe bezeichnet. (Das bedeutet eine relative Abweichung von  $10^{-16}$  bis  $10^{-20}$  bei den typischen Probengrößen.)

Es ist heute allgemein anerkannt, daß die Hall-Quantisierung bei ganzzahligen Vielfachen von  $e^2/h$  in Proben mit geringerer Beweglichkeit ( $\mu \approx 10000 \text{ cm}^2/Vs$  bei Si-MOSFETs bzw.  $\mu \approx 100000 \text{ cm}^2/Vs$  bei GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Heterostrukturen) vollständig durch ein Modell von nicht-wechselwirkenden Elektronen in einem ungeordneten Potential beschrieben werden kann<sup>82, 83, 137</sup>. Hingegen werden Coulomb-Wechselwirkungseffekte als grundlegend für die Quantisierung bei rationalen Vielfachen von  $e^2/h$  für die Erklärung des *fraktionalen* Quanten-Hall-Effekts erachtet<sup>138</sup>.

T. Ando und H. Aoki<sup>6</sup> haben als erste vorgeschlagen, daß im ungeordneten Einzelteilchen-Modell eine Folge von *Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergängen* (LD) auftritt, wenn die Fermienergie ( $\varepsilon_F \propto B^{-1}$ ) durch die Variation des Magnetfeldes durchgeführt wird. Geht man einmal von dem Lokalisierungs-Delokalisierungs-Szenarium aus, dann kann die Hall-Quantisierung bei ganzzahligen Vielfachen von  $e^2/h$  mit verschiedenen Theorien erklärt werden. Zum Beispiel mit streutheoretischen Argumenten<sup>33</sup>, mit topologischen Argumenten<sup>19, 104, 128</sup> oder Argumenten der Stromkompensation<sup>25</sup>.

Der Übergangsbereich zwischen den Plateaus dagegen, vor allem auch der Peak in der diagonalen Leitfähigkeit, ist damit noch nicht hinreichend verstanden. Dieser Bereich wird mittlerweile als ein kritisches Phänomen, genauer als eine Art geometrischer Phasenübergang zweiter Ordnung verstanden, bei dem multifraktales Skalenverhalten auftritt. Dafür sprechen Potenzgesetze, die in zahlreichen numerischen<sup>69, 119</sup> Untersuchungen und mittlerweile zum Teil auch experimentell<sup>89-93</sup> nachgewiesen wurden.

Für quasi-eindimensionale Systeme (deren Länge wesentlich größer als ihre Breite ist) existiert die strenge Aussage (R. Johnston, H. Kunz<sup>81</sup>), daß alle Zustände mit wachsender Länge lokalisiert werden. In zweidimensionalen Systemen sind bei Abwesenheit von Magnetfeldern und Spin-Bahn-Streuung ebenfalls alle Zustände lokalisiert<sup>1, 161</sup>. Als untere kritische Dimension für den durch Unordnung getriebenen LD-Übergang wurde  $d = 2$  vermutet<sup>1</sup>. Die Spin-Bahn-Wechselwirkung<sup>41, 46, 47</sup> oder schwache Magnetfelder<sup>23, 51</sup> dagegen führen, wie numerische Untersuchungen zeigen, zu einem LD-Phasenübergang in zwei Dimensionen. Der LD-Übergang bei einem zweidimensionalen, ungeordneten System im *starken* Magnetfeld wird, nach heutigem allgemeinen Konsens, als der wesentliche Mechanismus für die Erklärung des Quanten-Hall-Effekts herangezogen. In dreidimensionalen ungeordneten Systemen steht die Existenz eines LD-Überganges ebenfalls außer Zweifel.<sup>1, 29, 96, 111, 112, 114, 135</sup>



Von D. E. Khmel'nitskiĭ<sup>84</sup> wurde auf der Basis der Arbeiten von H. Levine, S. B. Libby und A. M. M. Pruisken<sup>107</sup> ein zweiparametrisches Renormierungs-Flußdiagramm (nebenstehende Abbildung) vorgeschlagen, nachdem die gewöhnliche einparametrische Renormierungsgruppe nicht in der Lage ist, bei Anwesenheit eines Magnetfeldes, die Delokalisierung von Zuständen in einem zweidimensionalen System zu erklären. Die zu renormierenden Kopplungskonstanten der Feldtheorie werden dabei mit den

Leitwerten  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{xy}$  identifiziert. Es ist jedoch bis heute noch nicht gelungen die kritischen Exponenten aus dieser Theorie abzuleiten. Auch wird über den Fixpunktwert  $\sigma_{xx}^c$  keine Aussage gemacht. D. E. Khmel'nitskiĭ sagte ein periodisches Flußdiagramm vorher, was die Universalität des Exponenten  $\nu$  und Fixpunktes  $\sigma_{xx}^c$  zur Folge hat. A. M. M. Pruisken dagegen räumt eine Abhängigkeit dieser Größe vom Landau-Niveau ein<sup>138</sup>. Qualitativ wurde ein entsprechendes Flußdiagramm in Experimenten<sup>167, 91</sup> nachgewiesen. Dabei wird die temperaturabhängige, inelastische, freie Weglänge als effektive Systemgröße interpretiert. Mittlerweile sind bereits auch einige Indizien für die Universalität beider Größen bezüglich Landau-Quantenzahl und Korrelationslänge der Unordnung, vor allem in numerischen Untersuchungen gesammelt worden<sup>75, 78, 105, 106</sup>. In dieser Arbeit sollen noch weitere hinzugefügt werden.

Kontaktlose Messungen<sup>50</sup> des räumlichen Verlaufes des Hall-Potentiales im Inneren von GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As Heterostrukturen ( $\mu = 100000 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ ,  $T = 1.5\text{K}$ ) mit Hilfe des Pockels-Effekts zeigen, daß im Plateaubereich das lokale Potential an den Probenrändern steil zunimmt und im Inneren einen in etwa linearen Anstieg aufweist. Verläßt man den Plateaubereich, wird der lineare Verlauf im Inneren noch wesentlich ausgeprägter und der Randeffekt geringer. Deswegen werden, zumindest in dem uns hier interessierenden Bereich des Lokalisierungs-Delokalisierungsübergangs zwischen den Plateaus, Bulk-Eigenschaften die wesentliche Rolle spielen. Auch in den Mikrowellenexperimenten<sup>100, 44</sup>, bei denen die Hall-Plateaus noch bei Frequenzen von 14GHz

beobachtet werden können, sollten Randeﬀekte keine Rolle spielen. Deshalb werden im folgenden ausschließlich Bulk-Eigenschaften behandelt.

Für den Limes großer Magnetfelder wird das Hochfeldmodell<sup>158, 109, 170</sup> vorgeschlagen. Anders als in den vorher genannten Theorien, wird hier auch der LD-Übergang, durch die Abbildung auf die *Perkolation*<sup>31</sup>, erklärt. Mittlerweile können im Hochfeld-Modell nicht nur die Hall-Plateaus, sondern auch der  $\sigma_{xx}$ -Peak im kritischen Bereich, in einer semiklassischen Erweiterung des Modells<sup>45</sup>, im Prinzip verstanden werden. Erstaunlicherweise zeigt das Maximum von  $\sigma_{xx}$  in der numerischen Simulation einen Wert bei  $0.5 e^2/h$ . Die Existenz eines universellen statischen Leitfähigkeitsfixpunktes bei  $\sigma_{xx}^c = e^2/2h$  wurde erst kürzlich vorgeschlagen<sup>105, 106</sup> und in numerischen, quantenmechanischen Rechnungen<sup>78</sup> überprüft. Im Niederfrequenzverhalten der dynamischen Leitfähigkeit tritt im semiklassischen Modell eine Anomalie auf. Anstatt des konventionellen Drude-Verhaltens findet man einen linearen Abfall vom Wert der Gleichstromleitfähigkeit. Dies ist ein Hinweis auf *Long Time Tails* in der Impulsrelaxation. Die Existenz dieser Anomalien im quantenmechanischen Modell soll hier nachgewiesen werden.

Analytische Aussagen über die dynamische Leitfähigkeit existieren zur Zeit nur für die Tails der Landau-Bänder: Wenn die Fermi-Energie in den Tails liegt, verschwindet die statische longitudinale Leitfähigkeit für hohe Landau-Quantenzahlen<sup>43</sup>. Es wurde auch gezeigt, daß die dynamische Leitfähigkeit im untersten Landau-Niveau<sup>18, 160</sup> wie  $\omega^2 \ln(\Gamma/\omega)^2$  gegen Null geht.

## 1.2 Kapitelübersicht

Kapitel 2 dient der Einführung in die Beschreibung von Korrelationsfunktionen in der Theorie des Linearen Response und deren Darstellung durch Resolventen. Diese wird für die Entwicklung einer numerischen Methode zur Berechnung der dynamischen Leitfähigkeit benötigt.

In Kapitel 3 wird ein neues, effizientes Rekursionsverfahren zur Berechnung der dynamischen Leitfähigkeit auf der Basis der Green-Funktions-Methode entwickelt.

Das Kapitel 4 dient der Untersuchung des eindimensionalen Anderson-Modells als erster Testfall für die neue Rekursionsmethode. Die Eigenschaften dieses Systems sind bereits weitgehend bekannt und die numerischen Resultate können mit analytischen Ergebnissen, sowie älteren Simulationen verglichen werden. Insbesondere wird asymptotisch, bei kleinen Frequenzen, das Mottsche  $\omega^2 \ln^2 \omega$  Verhalten numerisch erstmals auch definitiv nachgewiesen. Es zeigen sich aber auch, bei schon sehr schwacher Unordnung, signifikante Abweichungen von der nur asymptotisch exakten Theorie von V. L. Berezinskii.

In Kapitel 5 wird das noch relativ neue mathematische Werkzeug der Multifraktale kurz eingeführt, um den Zusammenhang von fraktalen Dimensionen mit den in Kapitel 6 auftretenden kritischen Exponenten am Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang

herzustellen.

In Kapitel 6, dem zentralen Teil dieser Arbeit, wird die entwickelte Methode auf das wesentlich komplexere Problem eines zweidimensionalen, ungeordneten Systems im Magnetfeld angewandt. Im Gegensatz zur vollständigen Lokalisierung im eindimensionalen Fall, tritt hier ein durch Unordnung und Magnetfeld erzeugter Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang auf, der eng mit der Existenz des Quanten-Hall-Effekts verknüpft ist. Da es sich hier um ein kritisches Phänomen handelt, treten am Übergang Skalengesetze im statischen, wie auch im dynamischen Verhalten auf. Es wird gezeigt, daß das Skalenverhalten des  $\sigma_{xx}$ -Peaks der statischen Leitfähigkeit in der Nähe eines universellen Fixpunktes  $\sigma_{xx}^c = (0.5 \pm 0.02)e^2/h$  im wesentlichen von *zwei* kritischen Exponenten dominiert wird<sup>52</sup>: Zum einen vom bekannten Exponenten der Lokalisierungslänge  $\nu = 2.37 \pm 0.05$ , zum anderen von einem Exponenten  $\eta' = 1.63 \pm 0.03$ , der mit der verallgemeinerten fraktalen Dimension  $D_2$  identifiziert wird. Damit wird gezeigt, daß eine direkte experimentelle Bestimmung von  $D_2$  in einem Tieftemperaturexperiment möglich sein sollte. Im dynamischen Verhalten zeigt sich das, im Grenzfall kleiner Frequenzen bereits bekannte anomale Diffusionsverhalten, welches durch den Exponenten  $\eta = 2 - D_2 = 0.38 \pm 0.10$  charakterisiert wird. Dieses wird auch bei langreichweitigen Potentialen gefunden. Insbesondere wird in diesem Kapitel die Existenz von *Long-Time-Tails* (ein Begriff, der im Zusammenhang mit dem Quanten-Hall-Effekt erst kürzlich Eingang in die Literatur gefunden hat) in einer frequenzabhängigen, vollständig quantenmechanischen Rechnung nachgewiesen. Die zunächst in einem semiklassischen Modell gefundenen Long-Time-Tails in der dynamischen Leitfähigkeit bleiben auch im quantenmechanischen Problem, bei langreichweitigen Potentialen erhalten. Daraus kann geschlossen werden, daß eine signifikante Abweichung vom konventionellen Drude-Verhalten auch experimentell nachweisbar sein sollte.

Im Kapitel 7 wird ein, auf einer streutheoretischen Formulierung beruhendes Verfahren zur Berechnung von Wellenfunktionen beschrieben und auf die Möglichkeit zur Berechnung von Hall-Winkel und Leitfähigkeit hin untersucht. Das multifraktale Spektrum der Wellenfunktionen zeigt die aus anderen Rechnungen bekannten Eigenschaften. Dann wird das Verfahren zur Berechnung der statischen Leitfähigkeit und des Hall-Winkels eingesetzt. Die Resultate für die Leitfähigkeit sind gut verträglich mit den Präzisionsergebnissen aus dem vorigen Kapitel.

Eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit folgt im letzten Abschnitt, Kapitel 8.

## 2

# Korrelationsfunktionen im Linearen Response

**K**ubo konnte in seiner Theorie des *linear response*<sup>99</sup> zeigen, daß die lineare Antwort eines Systems auf eine äußere Störung durch die Relaxation der Fluktuationen im thermodynamischen Gleichgewicht bestimmt wird. Eine zeitabhängige äußere Kraft, konjugiert zu einer Observablen  $a$ , erzeugt eine Änderung in einer Observablen  $b$ , die man durch eine dynamische Suszeptibilität<sup>\*</sup>

$$\chi_{ab}(t) = \frac{i}{\hbar} \text{Tr}\{[a(t), b]f(H)\}\theta(t) \quad (2.1)$$

ausdrücken kann. Im folgenden beschränken wir uns auf Ein-Teilchen-Operatoren.  $H$  ist dabei der Ein-Teilchen-Hamilton-Operator des ungestörten Fermion-Systems, d. h. bei Abwesenheit von äußeren Feldern, die das System aus dem Gleichgewicht treiben, und

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-\mu)/k_B T}}$$

bezeichnet die Fermi-Verteilung im großkanonischen Ensemble.  $\mu$  ist das chemische Potential.

Die Fourier-Transformation führt auf die Energiedarstellung

$$\chi_{ab}(z) = \frac{1}{\hbar} \sum_{\kappa\mu} a_{\kappa\mu} b_{\mu\kappa} \frac{f(E_\kappa) - f(E_\mu)}{\omega_\mu - \omega_\kappa - z}. \quad (2.2)$$

Der Zusammenhang zwischen dynamischer Relaxationsfunktion und dynamischer Suszeptibilität ist gegeben durch

$$\Phi_{ab}(z) = \frac{\chi_{ab}(z) - \chi_{ab}(0)}{z}. \quad (2.3)$$

Daraus erhält man sofort die Energiedarstellung

$$\Phi_{ab}(z) = \frac{1}{\hbar} \sum_{\kappa\mu} a_{\kappa\mu} b_{\mu\kappa} \frac{f(E_\kappa) - f(E_\mu)}{(\omega_\mu - \omega_\kappa - z)(\omega_\mu - \omega_\kappa)}. \quad (2.4)$$

---

<sup>\*</sup>Im folgenden wird die Notation nach dem Lehrbuch von W. Brenig<sup>27</sup> benutzt.

## 2.1 Darstellung durch Resolventen

Alle Korrelationsfunktionen können auch vollständig durch Resolventen ausgedrückt werden. Die im folgenden gewählten Darstellungen erwiesen sich als zweckmäßig im Hinblick auf das in Kapitel 3 entwickelte Rekursionsverfahren zur Berechnung der dynamischen Leitfähigkeit. Wie sich zeigt, führt die Vermeidung von Termen mit Produkten von Resolventen auf einfachere Rekursionsgleichungen.

Für die Resolventen wird die folgende kompakte Notation benutzt:

$$\begin{aligned} G(\zeta) &= \frac{1}{\zeta - H} \\ G &= G(E + i\varepsilon) \\ G_\omega &= G(E + \hbar\omega + i\varepsilon). \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, daß der Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  dabei immer zum Schluß der Rechnung auszuführen ist, damit im thermodynamischen Limes auch alle Zustände aus dem Spektrum von  $H$  beitragen. In dieser Notation lautet die

Resolventendarstellung der dynamischen Suszeptibilität

$$\chi_{ab}(z) = \frac{i}{2\pi} \int dE f(E) \text{Tr} \{ a G_\omega b (G^* - G) + a (G^* - G) b G_{-\omega}^* \}. \quad (2.5)$$

Um die Äquivalenz dieses Ausdruckes mit der Energiedarstellung (2.2) zu zeigen, müssen wir die Polstruktur der Summanden von

$$\chi_{ab}(z) = \frac{i}{2\pi} \int dE f(E) \sum_{\kappa\mu} a_{\kappa\mu} b_{\mu\kappa} \{ G_\omega^\mu (G^{*\kappa} - G^\kappa) + (G^{*\mu} - G^\mu) G_{-\omega}^{*\kappa} \} \quad (2.6)$$

mit der der Summanden in (2.2) vergleichen. Im Fall

- $\mathbf{E}_\mu \neq \mathbf{E}_\kappa + \hbar\omega$

haben  $G_\omega^\mu = [E + \hbar\omega + i\varepsilon - E_\mu]^{-1}$  bei  $E_\kappa$  und  $G_{-\omega}^{*\kappa} = [E - \hbar\omega - i\varepsilon - E_\kappa]^{-1}$  bei  $E_\mu$  keinen Pol im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Dann darf man die Darstellung der  $\delta$ -Funktion  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (G^* - G) = 2\pi i \delta(E - H)$  einsetzen und erhält für die Summanden

$$\frac{1}{\hbar} a_{\kappa\mu} b_{\mu\kappa} \frac{f(E_\kappa) - f(E_\mu)}{\omega_\mu - \omega_\kappa - z}$$

und die Äquivalenz mit (2.2).

- $\mathbf{E}_\mu = \mathbf{E}_\kappa + \hbar\omega$

Um die Singularität zu untersuchen, multipliziert man in diesem Fall die Summanden der rechten Seite von (2.6) mit  $\varepsilon$  und erhält

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \int dE f(E) a_{\kappa\mu} b_{\mu\kappa} \left\{ \frac{\varepsilon/\pi}{(E - E_\kappa)^2 + \varepsilon^2} - \frac{\varepsilon/\pi}{(E - E_\kappa - \hbar\omega)^2 + \varepsilon^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\varepsilon/\pi}{(E - E_\kappa)^2 - \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon/\pi}{(E - E_\kappa - \hbar\omega)^2 - \varepsilon^2} \right\} \\ & = \frac{i}{2} a_{\kappa\mu} b_{\mu\kappa} \{f(E_\kappa) - f(E_\kappa + \hbar\omega)\}. \end{aligned}$$

da die Beiträge des 3. und 4. Terms im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  exakt verschwinden. Für die mit  $\varepsilon$  multiplizierten Summanden von (2.2) würde sich aber mit  $z = \omega + i\varepsilon$  der doppelte Beitrag ergeben:

$$a_{\kappa\mu} b_{\mu\kappa} \frac{f(E_\kappa) - f(E_\kappa + \hbar\omega)}{-i\varepsilon} \cdot \varepsilon = i a_{\kappa\mu} b_{\mu\kappa} \{f(E_\kappa) - f(E_\kappa + \hbar\omega)\}$$

Um also die Resolventendarstellung (2.5) mit der dynamischen Suszeptibilität  $\chi_{ab}(z)$  in (2.2) identifizieren zu dürfen, muß man die Störung der

**komplexen Frequenz**

$$z = \omega + 2i\varepsilon/\hbar \tag{2.7}$$

adiabatisch mit dem *doppelten* Infinitesimalparameter  $2\varepsilon$  einschalten.

Durch Einsetzen von (2.5) in (2.3) erhält man die Darstellung der Relaxationsfunktion. Bei  $\chi_{ab}(0)$  ist in den Resolventen dabei  $\omega = 0$  zu setzen. Dies ergibt die wichtige

**Resolventendarstellung der dynamischen Relaxation**

$$\Phi_{ab}(z) = \frac{i\hbar}{2\pi} \int dE f(E) \text{Tr}\{a(G^* - G)bG_{-\omega}^*G^* - aG_\omega Gb(G^* - G)\}. \tag{2.8}$$

Man kann dieses Resultat auch durch eine analoge, aber aufwendigere Diskussion der Polstruktur und dem Vergleich mit der Energiedarstellung (2.4) direkt prüfen.

## 2.2 Elimination von Zeitableitungen

Die elektrische Leitfähigkeit wird durch die Strom- bzw. Geschwindigkeitsrelaxation bestimmt:

$$\sigma_{\mu\nu}(z) = -i \frac{e^2}{v} \Phi_{\dot{\mu}\dot{\nu}}(z), \quad (2.9)$$

wobei

$$\dot{\mu} \equiv \frac{1}{m} \left( p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right), \quad \mu \in \{x, y, z\}$$

der kanonische Geschwindigkeitsoperator,  $A_\mu$  das Vektorpotential und  $v$  das Volumen des Systems ist.

Für das im folgenden Abschnitt entwickelte Iterationsverfahren wird es nötig sein, die Zeitableitungen der Operatoren in  $\Phi_{\dot{a}\dot{b}}(z)$  zu eliminieren. Es ist zweckmäßig dazu die Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\dot{a} = \frac{i}{\hbar} [H, a]$$

mit Resolventen darzustellen<sup>160</sup>

$$G(z_1) \dot{a} G(z_2) = \frac{i}{\hbar} [G(z_1) a - a G(z_2) + (z_1 - z_2) G(z_1) a G(z_2)]. \quad (2.10)$$

Nach einfacher, aber ziemlich langwieriger Rechnung erhält man aus (2.8), (2.10) und den Umrechnungsformeln zwischen Differenzen und Produkten von Resolventen (z.B.  $G^* - G = 2i\varepsilon G^* G$  oder  $G_\omega - G^* = -z G_\omega G^*$ ) den allgemeinen Ausdruck für die

### Geschwindigkeitsrelaxation in Resolventendarstellung

$$\begin{aligned} 2\pi i \hbar \Phi_{\dot{a}\dot{b}}(z) &= (\hbar z)^2 \int dE \frac{f(E + \hbar\omega) - f(E)}{\hbar\omega} \text{Tr}\{a G_\omega b G^*\} \\ &+ \hbar\omega \int dE f(E) \text{Tr}\{a G_\omega b G - a G^* b G_{-\omega}^*\} \\ &+ 2i\varepsilon \int dE f(E) \text{Tr}\{b a G_\omega G - a b G^* G_{-\omega}^*\} \\ &+ 2\pi i \langle [a, b] \rangle, \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei unter dem thermodynamischen Erwartungswert  $\langle a \rangle = \text{Tr}\{a f(H)\}$  zu verstehen ist. Man beachte wiederum (2.7).

Wenn die Operatoren  $a$  und  $b$  vertauschen, erhält man daraus im Limes  $\omega \rightarrow 0$  die bekannte Greenwood-Formel, die den Zusammenhang der Korrelationen bei  $T = 0$  mit den Korrelationen bei endlichen Temperaturen regelt:

$$\Phi_{\dot{a}\dot{b}}(\omega = 0, T) = - \int dE \frac{\partial f(E)}{\partial E} \Phi_{\dot{a}\dot{b}}(\omega = 0, T = 0). \quad (2.12)$$

Die dynamische Korrelationsfunktion bei  $T = 0$ ,  $\omega = 0$  ist dabei eine reine Fermi-Kantengröße:

$$2\pi i \hbar \Phi_{ab}(\omega = 0, T = 0) = 4\varepsilon^2 \text{Tr}\{aGbG^* - abG^*G\}|_{E=E_F}. \quad (2.13)$$

Zur Herleitung benutzt man  $G^2 = -G'$  und partielle Integration im dritten Term von (2.11).

## 2.3 Die dynamische Leitfähigkeit

Aus dem allgemeinen Ausdruck der Relaxationsfunktion für die Zeitableitung beliebiger Operatoren (2.11) lassen sich nun leicht alle in der Literatur<sup>160</sup> zu findenden speziellen Darstellungen für die Leitfähigkeit (2.9) ableiten.

Für den statischen Leitfähigkeitstensor folgt zum Beispiel<sup>154</sup>

$$\sigma_{\mu\nu}(\omega = 0, T = 0) = \frac{e^2}{h} \frac{4\varepsilon^2}{v} \text{Tr}\{\mu\nu|G|^2 - \mu G\nu G^*\}. \quad (2.14)$$

Für den Realteil der dynamischen Leitfähigkeit bei verschwindender Temperatur  $T = 0$  gewinnt man nach kurzer Umformung den Ausdruck<sup>147</sup>

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega, T = 0) = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2v} \frac{1}{\hbar\omega} \int_{\varepsilon_F - \hbar\omega}^{\varepsilon_F} dE \text{Re Tr}\{(\hbar z)^2 [x, G_\omega][x, G^*] - (\hbar\omega)^2 [x, G_\omega][x, G]\}. \quad (2.15)$$

Für das, im nächsten Kapitel entwickelte, numerische Verfahren ist eine Darstellung, die weniger Terme enthält, allerdings wesentlich günstiger, da die sich ergebenden Rekursionsgleichungen einfacher werden. Man erhält aus (2.11) für den

dissipativen Anteil der dynamischen Leitfähigkeit

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega, T = 0) = \frac{e^2}{h} \frac{1}{v} \frac{1}{\hbar\omega} \int_{\varepsilon_F - \hbar\omega}^{\varepsilon_F} dE \text{Re Tr}\{(\hbar z)^2 x G_\omega x G^* - (\hbar\omega)^2 x G_\omega x G + 2i\varepsilon x^2 (G_\omega - G^*)\}. \quad (2.16)$$

Diese Darstellung wird im folgenden ausschließlich benutzt.

### 3

## Die Green-Funktions-Rekursionsmethode für die dynamische Leitfähigkeit

Bei der Untersuchung von ungeordneten Systemen stellt das Fehlen von vereinfachenden Symmetrien ein großes Problem, zum Beispiel in der numerischen Berechnung von Transporteigenschaften dar (wie natürlich auch in der analytischen Behandlung). Das Auftreten starker Fluktuationen kann immense Systemgrößen nötig machen, um Aussagen über das Verhalten im thermodynamischen Limes zu machen. Als Beispiel sei die Leitfähigkeit im eindimensionalen Anderson-Modell genannt, die auch Gegenstand der Untersuchung sein wird (Kapitel 4). Ist mit der Unordnung auch das Auftreten eines kritischen Phänomens, zum Beispiel ein Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang verbunden, stellen kritische Fluktuationen und langreichweitige (bzw. Langzeit-) Korrelationen, die typischerweise durch Potenzgesetze charakterisiert werden, noch höhere Anforderungen.

Bei der Simulation solcher Systeme stößt man zuerst an die Speichergrenzen des Computers. Untersuchungsmethoden, die auf der Diagonalisierung basieren, benötigen bei einem  $d$ -dimensionalen System der Kantenlänge  $L$  Speicherplatz für  $\mathcal{O}(L^{2d})$  Matrixelemente. Die Anzahl der wesentlichen Rechenoperationen bei der Berechnung des ganzen Eigensystems wächst sogar mit  $\mathcal{O}(L^{3d})$ . Zu diesen Methoden gehören zum Beispiel die direkte Berechnung der Leitfähigkeit mit Hilfe der Kubo-Formel<sup>8</sup> oder die Berechnung des Leitwertes mit Hilfe der Thouless-Zahl. Ebenso die Untersuchung von Größen, die die komplette Berechnung der Wellenfunktion erfordern, also etwa die Bestimmung des multifraktalen Spektrums<sup>136, 151, 152</sup>, die inverse Besetzungszahl<sup>149</sup>, oder die Quantum-Connectivity<sup>23, 51, 143</sup>. Auch die streutheoretische Methode, wie sie in Kapitel 7 zur Berechnung von Wellenfunktionen verwendet wurde, gehört zu dieser Klasse von Methoden, wenn die zugrunde liegende Lippmann-Schwinger-Gleichung *nicht* iterativ gelöst wird.

Einen wesentlichen Fortschritt stellt die Entwicklung der Green-Funktions-Methode durch A. MacKinnon<sup>110</sup> und die Transfermatrix-Methode durch J. L. Pichard und G. Sarma<sup>135</sup> dar.

Der Grundgedanke beider Methoden ist es, ein  $d$ -dimensionales System der Länge  $N$  „schichtweise“ aus Streifen mit dem Querschnitt  $L^{d-1}$  aufzubauen und die zu untersuchende Observable  $P(N+1)$  rekursiv aus dem Wert  $P(N)$  zu gewinnen.

Typischerweise können damit Systeme der Größe  $M = NL^{d-1} \lesssim 10^9$  numerisch berechnet werden, wobei der Streifenquerschnitt  $L^{d-1} \lesssim 10^2$  den benötigten Speicherplatz

bestimmt, die Länge  $N$  aber im Prinzip unbegrenzt, d. h. nur die verfügbare Rechenzeit beschränkt ist. Die Systeme sind also *extrem anisotrop*. Es ist jedoch allgemein möglich mit Hilfe einer *Finite-Size-Scaling*-Analyse das Verhalten als Funktion der Breite  $L$  zu untersuchen und auf den thermodynamischen Limes zu extrapolieren.

Die Transfermatrix-Methode wurde bislang im wesentlichen nur für die Berechnung der Lokalisierungslänge eingesetzt<sup>37, 46, 47, 106, 108</sup>. Diese kann mit dem Inversen des betragsmäßig kleinsten Lyapunov-Exponenten  $\gamma$  identifiziert werden,  $\xi = \gamma^{-1}$ . Der Informationsgehalt der übrigen Eigenwerte wird im allgemeinen nicht genutzt.

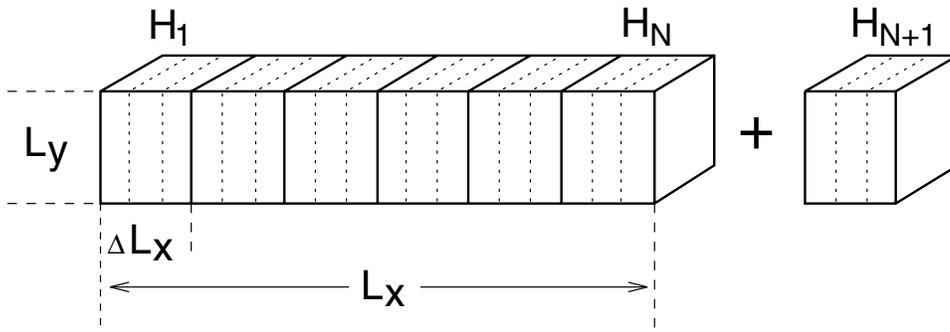
Die Green-Funktions-Methode hat den Vorteil, daß sie nicht nur für die Lokalisierungslänge<sup>29, 111, 69, 70, 72, 153</sup> geeignet ist, sondern einfach auf die Berechnung von komplizierteren Größen, zum Beispiel die Zustandsdichte<sup>95, 113, 153</sup> oder die statische Leitfähigkeit<sup>113, 154</sup>, verallgemeinert werden kann. Der numerische Aufwand bei der Berechnung der Lokalisierungslänge ist bei beiden Methoden etwa gleich groß. Die Einwicklung einer Green-Funktions-Methode für die dynamische Leitfähigkeit wird in Abschnitt 3.3 vorgestellt.

### 3.1 Prinzip der Methode

Als Ausgangspunkt für die Green-Funktions-Methode betrachte man einen Tight-Binding-Hamilton-Operator der Form

$$\hat{H} = \sum_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\beta|, \quad (3.1)$$

wobei geeignete, auf einem Gitter\* lokalisierte Basisfunktionen  $|\mathbf{r}\rangle$  eingeführt werden. Das System wird nun aus Streifen der Breite  $L_y$  und der Dicke  $\Delta L_x$  aufgebaut.



Fügt man an einen Stapel der Länge  $N$  einen Streifen  $N+1$  an, kann man den Hamilton-Operator in drei Anteile zerlegen:

$$\hat{H} = \mathbf{H}_{ij} + \mathbf{H}_{N+1,N+1} + (\mathbf{H}_{N,N+1} + \mathbf{H}_{N,N+1}^+) \quad (3.2)$$

\*zur Vereinfachung der Darstellung, aber nicht notwendigerweise

$\mathbf{H}_{N,N+1} \equiv \mathbf{V}_N$  ist dabei der außerdiagonale Anteil, der den  $N$ -ten mit dem  $N+1$ -ten Streifen koppelt und  $\mathbf{H}_{N+1,N+1} \equiv \mathbf{H}_{N+1}^0$  ist die Hamilton-Matrix des zuletzt angefügten Streifens. Die lateinischen Indizes bezeichnen die Streifen, in denen ein Unterraum von  $K$  Basisfunktionen liegt.

Die Green-Funktion des Systems aus  $N+1$  Streifen kann dann aus der Green-Funktion des Systems aus  $N$  Streifen mittels der Dyson-Gleichung berechnet werden, wobei  $\mathbf{V}_N$  die Wechselwirkung darstellt:

$$\mathbf{G}_{i,j}^{\omega(N+1)} = \mathbf{G}_{i,j}^{\omega(N)} + \mathbf{G}_{i,N}^{\omega(N)} \mathbf{V}_N \mathbf{G}_{N+1,j}^{\omega(N+1)}. \quad (3.3)$$

Daraus ergeben sich die Rekursionsgleichungen für alle Matrixelemente der Green-Funktion:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{N+1,N+1}^{\omega(N+1)} &= \left[ (E + \hbar\omega + i\varepsilon) \mathbf{I} - \mathbf{H}_{N+1}^0 - \mathbf{V}_N^+ \mathbf{G}_{N,N}^{\omega(N)} \mathbf{V}_N \right]^{-1} \\ \mathbf{G}_{i,j}^{\omega(N+1)} &= \mathbf{G}_{i,j}^{\omega(N)} + \mathbf{G}_{i,N}^{\omega(N)} \mathbf{V}_N \mathbf{G}_{N+1,N+1}^{\omega(N+1)} \mathbf{V}_N^+ \mathbf{G}_{N,j}^{\omega(N)} \\ \mathbf{G}_{i,N+1}^{\omega(N+1)} &= \mathbf{G}_{i,N}^{\omega(N)} \mathbf{V}_N \mathbf{G}_{N+1,N+1}^{\omega(N+1)} \\ \mathbf{G}_{N+1,j}^{\omega(N+1)} &= \mathbf{G}_{N+1,N+1}^{\omega(N+1)} \mathbf{V}_N^+ \mathbf{G}_{N,j}^{\omega(N)} \end{aligned} \quad (i, j \leq N) \quad (3.4)$$

$\mathbf{G}_{ij}^{\omega(N)}$  bezeichnet die Resolventenmatrix im  $N$ -ten Iterationsschritt, die auf dem  $K$ -dimensionalen Unterraum, der durch die Indizes  $i, j$  bezeichneten Streifen, operiert.  $\mathbf{I}$  ist die  $K$ -dimensionale Einheitsmatrix und  $\mathbf{O}$  die  $K$ -dimensionale Null. Es ist zweckmäßig weitere Abkürzungen einzuführen: Es sei  $\mathbf{R}_N^\omega = \mathbf{G}_{N,N}^{\omega(N)}$  und  $v_N$  das Volumen des Systems aus  $N$  Streifen. In den folgenden Kapiteln bezeichnet  $L$  die Streifenbreite  $L_y$  (in Einheiten des Zyklotronradius  $\ell$ , wenn bei Zahlenangaben keine Einheit angegeben ist) und im statischen Fall  $\omega = 0$  wird das Superscript an den Resolventen weggelassen.

Mit den Gleichungen (3.4) können rekursiv alle Matrixelemente der Green-Funktion berechnet werden, wenn ein neuer Streifen angefügt wird. Da prinzipiell jede Observable durch die Green-Funktion des Systems ausgedrückt werden kann, lassen sich entsprechende Rekursionsrelationen für die Observablen herleiten. Die verbleibende Aufgabe ist es, numerisch stabile Rekursionsgleichungen für diese zu entwickeln.

## 3.2 Die Zustandsdichte

Für die Zustandsdichte

$$\varrho(E) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{v} \text{Im Tr } G(E) \quad (3.5)$$

erhält man die Rekursionsgleichungen<sup>95, 153</sup> in wenigen Zeilen durch Einsetzen von (3.4) in (3.5) drei gekoppelte Rekursionsgleichungen:

$$\varrho_{N+1} = \frac{1}{\pi v_{N+1}} Q_{N+1} \quad (3.6a)$$

$$Q_{N+1} = Q_N - \text{Im Tr} \{ \mathbf{R}_{N+1} (\mathbf{F}_N + \mathbf{I}) \} \quad (3.6b)$$

$$\mathbf{F}_{N+1} = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1} (\mathbf{F}_N + \mathbf{I}) \mathbf{R}_{N+1} \mathbf{V}_{N+1} \quad (3.6c)$$

$$\mathbf{R}_{N+1} = \left[ (E + i\varepsilon) \mathbf{I} - \mathbf{H}_{N+1}^0 - \mathbf{V}_N^+ \mathbf{R}_N \mathbf{V}_N \right]^{-1} \quad (3.6d)$$

wobei die Hilfsgröße  $\mathbf{F}$  definiert ist durch

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{V}_N^+ \left( \sum_i^N \mathbf{G}_{Ni}^{(N)} \mathbf{G}_{iN}^{(N)} \right) \mathbf{V}_N. \quad (3.7)$$

Wie man bei der Herleitung schnell bemerkt, ist man (anders als etwa bei der Lokalisierungslänge) gezwungen, eine Hierarchie von Hilfsgrößen  $(Q, \mathbf{F})$  einzuführen, für die man ihrerseits Rekursionsgleichungen erhält. Die Startwerte für die rekursive Berechnung der Zustandsdichte sind  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{R}_0 = \mathbf{O}$  und  $Q_0 = 0$ .

### 3.3 Die dynamische Leitfähigkeit

Das Iterationsschema wird für die statische Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  und die Hall-Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$  bereits erheblich komplexer, da die Korrelationsfunktion Produkte von Green-Funktionen enthält. Entsprechende Ausdrücke sind von A. MacKinnon und L. Schweizer angegeben worden<sup>113, 154</sup>. Hier müssen bereit je fünf Größen iteriert werden.

Wesentlich aufwendiger ist die Entwicklung einer Methode zur Berechnung des dynamischen Verhaltens. Das einfachste System von Iterationsgleichungen für den Realteil der dynamischen Leitfähigkeit erhält man ausgehend von Gleichung (2.16).

$$\text{Re } \sigma_{xx}(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\hbar \omega} \int_{\varepsilon_F - \hbar \omega}^{\varepsilon_F} dE \sigma_N(\omega, E, \varepsilon) \quad (3.8)$$

mit

$$\sigma_N = \frac{e^2}{h} S_N \quad (3.9)$$

Die Iteration für  $S_N$  wird wieder, ähnlich wie bei den Gleichungen für die Zustandsdichte, durch Hilfsgrößen ausgedrückt. Allerdings werden hier 12 solcher Ausdrücke benötigt:

$$\begin{aligned} S_N = \text{Re Tr} \{ & \sum_{ij}^N (\hbar z)^2 x_i \mathbf{G}_{ij}^{\omega(N)} x_j \mathbf{G}_{ji}^{*(N)} \\ & - (\hbar \omega)^2 x_i \mathbf{G}_{ij}^{\omega(N)} x_j \mathbf{G}_{ji}^{(N)} \\ & + 2i\varepsilon \delta_{ij} x_i^2 (\mathbf{G}_{ij}^{\omega(N)} - \mathbf{G}_{ij}^{*(N)}) \} / v_N \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_N = \mathbf{V}_N^+ \left( \sum_{ij}^N \mathbf{G}_{Ni}^{*(N)} x_i [(\hbar z)^2 \mathbf{G}_{ij}^{\omega(N)} \right. \\ \left. - 2i\varepsilon \delta_{ij} \mathbf{I}] x_j \mathbf{G}_{jN}^{*(N)} \right) \mathbf{V}_N \end{aligned} \quad (3.10b)$$

$$\mathbf{B}_N = \mathbf{V}_N^+ \left( \sum_{ij}^N \mathbf{G}_{Ni}^{\omega(N)} x_i [(\hbar z)^2 \mathbf{G}_{ij}^{*(N)} \right.$$

$$+ 2i\varepsilon\delta_{ij}\mathbf{I} - (\hbar\omega)^2\mathbf{G}_{ij}^{(N)}]x_j\mathbf{G}_{jN}^{\omega(N)})\mathbf{V}_N \quad (3.10c)$$

$$\mathbf{C}_N = \mathbf{V}_N^+(\sum_{ij}^N (\hbar\omega)^2\mathbf{G}_{Ni}^{(N)}x_i\mathbf{G}_{ij}^{\omega(N)}x_j\mathbf{G}_{jN}^{(N)})\mathbf{V}_N \quad (3.10d)$$

$$\mathbf{D}_N^1 = \mathbf{V}_N^+(\hbar z \sum_i^N \mathbf{G}_{Ni}^{*(N)}x_i\mathbf{G}_{iN}^{\omega(N)})\mathbf{V}_N \quad (3.10e)$$

$$\mathbf{D}_N^2 = \mathbf{V}_N^+(\hbar z \sum_i^N \mathbf{G}_{Ni}^{\omega(N)}x_i\mathbf{G}_{iN}^{*(N)})\mathbf{V}_N \quad (3.10f)$$

$$\mathbf{D}_N^3 = \mathbf{V}_N^+(\hbar\omega \sum_i^N \mathbf{G}_{Ni}^{\omega(N)}x_i\mathbf{G}_{iN}^{(N)})\mathbf{V}_N \quad (3.10g)$$

$$\mathbf{D}_N^4 = \mathbf{V}_N^+(\hbar\omega \sum_i^N \mathbf{G}_{Ni}^{(N)}x_i\mathbf{G}_{iN}^{\omega(N)})\mathbf{V}_N \quad (3.10h)$$

$$\mathbf{D}_N^5 = \mathbf{V}_N^+(\hbar\omega \sum_i^N \mathbf{G}_{Ni}^{*(N)}x_i\mathbf{G}_{iN}^{*(N)})\mathbf{V}_N \quad (3.10i)$$

$$\mathbf{D}_N^6 = \mathbf{V}_N^+(\hbar\omega \sum_i^N \mathbf{G}_{Ni}^{(N)}x_i\mathbf{G}_{iN}^{(N)})\mathbf{V}_N \quad (3.10j)$$

$$\mathbf{E}_N^1 = \mathbf{V}_N^+(\hbar\omega \sum_i^N \mathbf{G}_{Ni}^{(N)}\mathbf{G}_{iN}^{(N)})\mathbf{V}_N \quad (3.10k)$$

$$\mathbf{E}_N^2 = \mathbf{V}_N^+(\hbar\omega \sum_i^N \mathbf{G}_{Ni}^{*(N)}\mathbf{G}_{iN}^{*(N)})\mathbf{V}_N \quad (3.10l)$$

Mit diesen Definitionen ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (3.4) ein System von 14 gekoppelten Rekursionsgleichungen.

$$\begin{aligned} S_{N+1} = S_N + \text{Re Tr} \{ & \mathbf{K}_N^1 \mathbf{R}_{N+1}^* \\ & + \mathbf{K}_N^2 \mathbf{R}_{N+1}^\omega - \mathbf{C}_N \mathbf{R}_{N+1} \} \end{aligned} \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{A}_{N+1} = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1}^* \mathbf{K}_N^1 \mathbf{R}_{N+1}^* \mathbf{V}_{N+1} \quad (3.11b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{N+1} = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1}^\omega ( & \mathbf{K}_N^2 \\ & + \mathbf{D}_N^2 \mathbf{R}_{N+1}^* \mathbf{D}_N^1) \mathbf{R}_{N+1}^\omega \mathbf{V}_{N+1} \end{aligned} \quad (3.11c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{N+1} = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1} ( & \mathbf{C}_N \\ & + \mathbf{D}_N^4 \mathbf{R}_{N+1}^\omega \mathbf{D}_N^3) \mathbf{R}_{N+1} \mathbf{V}_{N+1} \end{aligned} \quad (3.11d)$$

$$\mathbf{D}_{N+1}^1 = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1}^* \mathbf{D}_N^1 \mathbf{R}_{N+1}^\omega \mathbf{V}_{N+1} \quad (3.11e)$$

$$\mathbf{D}_{N+1}^2 = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1}^\omega \mathbf{D}_N^2 \mathbf{R}_{N+1}^* \mathbf{V}_{N+1} \quad (3.11f)$$

$$\mathbf{D}_{N+1}^3 = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1}^\omega \mathbf{D}_N^3 \mathbf{R}_{N+1} \mathbf{V}_{N+1} \quad (3.11g)$$

$$\mathbf{D}_{N+1}^4 = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1} \mathbf{D}_N^4 \mathbf{R}_{N+1}^\omega \mathbf{V}_{N+1} \quad (3.11h)$$

$$\mathbf{D}_{N+1}^5 = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1}^* \mathbf{D}_N^5 \mathbf{R}_{N+1}^* \mathbf{V}_{N+1} \quad (3.11i)$$

$$\mathbf{D}_{N+1}^6 = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1} \mathbf{D}_N^6 \mathbf{R}_{N+1} \mathbf{V}_{N+1} \quad (3.11j)$$

$$\mathbf{E}_{N+1}^1 = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1} (\mathbf{E}_N^1 + \hbar\omega\mathbf{I}) \mathbf{R}_{N+1} \mathbf{V}_{N+1} \quad (3.11k)$$

$$\mathbf{E}_{N+1}^2 = \mathbf{V}_{N+1}^+ \mathbf{R}_{N+1}^* (\mathbf{E}_N^2 + \hbar\omega\mathbf{I}) \mathbf{R}_{N+1}^* \mathbf{V}_{N+1} \quad (3.11l)$$

$$\mathbf{R}_{N+1} = \left[ (E + i\varepsilon)\mathbf{I} - \mathbf{H}_{N+1}^0 - \mathbf{V}_N^+ \mathbf{R}_N \mathbf{V}_N \right]^{-1} \quad (3.11m)$$

$$\mathbf{R}_{N+1}^\omega = \left[ (E + \hbar\omega + i\varepsilon)\mathbf{I} - \mathbf{H}_{N+1}^0 - \mathbf{V}_N^+ \mathbf{R}_N^\omega \mathbf{V}_N \right]^{-1} \quad (3.11n)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathbf{K}_N^1 = \mathbf{A}_N + \mathbf{D}_N^1 \mathbf{R}_{N+1}^\omega \mathbf{D}_N^2 \quad (3.11o)$$

$$\mathbf{K}_N^2 = \mathbf{B}_N - \mathbf{D}_N^3 \mathbf{R}_{N+1} \mathbf{D}_N^4 \quad (3.11p)$$

Der Beweis von (3.8-3.12) ist langwierig, kann aber mit den folgenden Hinweisen elementar nachvollzogen werden. Das Iterationsschema wird beträchtlich vereinfacht, wenn man den Ursprung an den jeweils zuletzt angefügten Streifen verschiebt. Dadurch verschwinden alle Terme von  $S_{N+1}$  in (3.10a), die den Faktor  $x_{N+1}$  enthalten. Bei jedem Iterationsschritt wird deshalb eine Koordinatentranslation  $x_i \rightarrow x'_i = x_i - \alpha$ , mit dem Streifenabstand  $\alpha = \Delta L_x$  durchgeführt werden, so daß der Ursprung stets bei  $x_{N+1} = 0$  liegt. Diese Vorgehensweise hat zusätzlich den Vorteil, daß numerische Instabilitäten eliminiert werden<sup>113</sup>. Allerdings müssen die Größen in (3.10) in jedem Schritt einer Translation unterworfen werden. Die dynamische Leitfähigkeit selbst, d. h.  $S_N$ , sowie  $\mathbf{E}_N^1, \mathbf{E}_N^2, \mathbf{R}_N, \mathbf{R}_N^\omega$  sind translationsinvariant unter der Verschiebung des Koordinatenursprungs. Die anderen iterierten Größen transformieren dabei gemäß

$$\mathbf{A}_N' = \mathbf{A}_N + \mathbf{H}_N^1 - 2\alpha \mathbf{D}_N^5 + \alpha^2 \mathbf{E}_N^2 + \alpha \mathbf{H}_N^3 \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{B}_N' = \mathbf{B}_N + \mathbf{H}_N^2 - \mathbf{H}_N^1 + \alpha(\mathbf{H}_N^4 - \mathbf{H}_N^3) \quad (3.12b)$$

$$\mathbf{C}_N' = \mathbf{C}_N + \mathbf{H}_N^2 - 2\alpha \mathbf{D}_N^6 + \alpha^2 \mathbf{E}_N^1 + \alpha \mathbf{H}_N^4 \quad (3.12c)$$

$$\mathbf{D}_N^{1/2'} = \mathbf{D}_N^{1/2} + \mathbf{H}_N^3 \quad (3.12d)$$

$$\mathbf{D}_N^{3/4'} = \mathbf{D}_N^{3/4} + \mathbf{H}_N^4 \quad (3.12e)$$

$$\mathbf{D}_N^5' = \mathbf{D}_N^5 - \alpha \mathbf{E}_N^2 \quad (3.12f)$$

$$\mathbf{D}_N^6' = \mathbf{D}_N^6 - \alpha \mathbf{E}_N^1, \quad (3.12g)$$

wobei die folgenden Abkürzungen eingeführt wurden

$$\mathbf{H}_N^1 = \alpha(\mathbf{D}_N^1 + \mathbf{D}_N^2) \quad (3.12h)$$

$$\mathbf{H}_N^2 = \alpha(\mathbf{D}_N^3 + \mathbf{D}_N^4) \quad (3.12i)$$

$$\mathbf{H}_N^3 = \alpha \mathbf{V}_N^+(\mathbf{R}_N^\omega - \mathbf{R}_N^*) \mathbf{V}_N \quad (3.12j)$$

$$\mathbf{H}_N^4 = \alpha \mathbf{V}_N^+(\mathbf{R}_N^\omega - \mathbf{R}_N) \mathbf{V}_N \quad (3.12k)$$

Zusammen erhält man pro Iterationsschritt 42 wesentliche Operationen, d. h. von der Ordnung  $\mathcal{O}(L_y^3)$  — dafür wächst der Aufwand aber nur noch mit  $\mathcal{O}(L_x)$  linear in Längsrichtung des Stapels. Bei der Implementierung des Verfahrens müssen natürlich alle Optimierungsmöglichkeiten ausgeschöpft werden. So sollten zum Beispiel mehrfach auftretende Produkte derselben Matrizen nur einmal ausmultipliziert werden und es sollte die Struktur der Matrizen ausgenutzt werden ( $\mathbf{V}$  ist eine Dreiecksmatrix,  $\mathbf{G}$  ist hermitesch).

Als Anfangsbedingungen können alle Iterationsgrößen in (3.11) gleich Null gesetzt werden, wenn  $\varepsilon \neq 0$  ist. Will man dagegen im thermodynamischen Limes  $\varepsilon$  gleich Null

setzen, muß man das System effektiv unendlich groß machen. Dies ist durch die Wahl entsprechender Randbedingungen möglich. A. MacKinnon<sup>113</sup> diskutiert zum Beispiel das Ansetzen von halb-unendlichen idealen Metallen an den beiden Enden des Stapels. Im folgenden wird von dieser Möglichkeit aber nicht Gebrauch gemacht, da zum einen schwierige Probleme mit der „Kontaktierung“ vermieden werden, und sich zum anderen die Kontrolle über den thermodynamischen Grenzwertprozeß als sehr nützlich erweisen wird. Der adiabatische Einschaltparameter kann im Prinzip immer klein genug gewählt werden!

Es bleibt zu bemerken, daß die Formulierung der Rekursionsgleichungen sehr viele Freiheiten zuläßt. So können die Terme sehr unterschiedlich zusammengefaßt werden. Vor allem beeinflußt aber die Wahl der Darstellung der dynamischen Leitfähigkeit durch Resolventen die Form des Rekursionsschemas. Das angegebene Iterationsverfahren ist einfacher und numerisch effizienter als ein ähnliches Verfahren, welches für das eindimensionale Anderson-Modell<sup>147</sup> angegeben wurde und auf der Gleichung (2.15) basiert (14 Hilfsgrößen und 16 gekoppelte Gleichungen). Gegenüber dem Verfahren für das eindimensionale Problem sollte die numerische Stabilität der oben angegebenen Gleichungen (3.8-3.12) auch in beliebiger Dimension gewährleistet bleiben. Die Ergebnisse aus der zitierten Arbeit<sup>147</sup> konnten zu Testzwecken leicht reproduziert, bzw. korrigiert werden (siehe folgendes Kapitel).

Für  $\omega \rightarrow 0$  gehen die Gleichungen (3.8-3.12) in die Rekursionsgleichungen für die statische Leitfähigkeit<sup>113, 154</sup> über. Das Iterationsschema wurde in den Modellrechnungen auch für die Berechnung der statischen Leitfähigkeit benutzt. Es ist allerdings um einen Faktor 2 aufwendiger als die entsprechenden, auf die statische Leitfähigkeit zugeschnittenen Iterationsgleichungen.

Gleichung (3.8) besagt, daß der Realteil der dynamischen Leitfähigkeit zuletzt aus einer Mittelung über alle Beiträge von  $\sigma_N(\omega, E, \varepsilon)$  bei den Energien  $E$  im Bereich von  $\varepsilon_F - \hbar\omega$  bis  $\varepsilon_F$  gewonnen werden müßte. Es zeigte sich, daß bei allen, in den folgenden Abschnitten diskutierten Systemen, die Abhängigkeit der Größe  $\sigma_N(\omega, E, \varepsilon)$  von  $E$  im Bereich  $[\varepsilon_F - \hbar\omega, \varepsilon_F]$  im Rahmen der erreichten statistischen Genauigkeit vernachlässigbar war. Die Mittelung (3.8) muß deshalb nicht durchgeführt werden und die Leitfähigkeit läßt sich bereits aus der Iteration bei einer festen Energie  $E$  gewinnen, die im folgenden immer an der Fermi-Kante gewählt wurde:

$$\operatorname{Re} \sigma_{xx}(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(\omega, E, \varepsilon)|_{E=\varepsilon_F} \quad (3.13)$$

In den nächsten Kapiteln soll nun das entwickelte Rekursionsverfahren auf die Berechnung der dynamischen Leitfähigkeit in verschiedenen Modellsystemen angewandt werden, zunächst im eindimensionalen Anderson-Modell, anschließend im Quanten-Hall-System.

# 4

## Modellrechnungen zum eindimensionalen Anderson-Modell

In diesem Kapitel wird das eindimensionale Anderson-Modell als erster Testfall für die Rekursionsmethode untersucht. Die Eigenschaften dieses Systems sind bereits weitgehend bekannt und die numerischen Resultate können mit analytischen Ergebnissen, sowie älteren Simulationen verglichen werden.

### 4.1 Das eindimensionale Anderson-Modell

Die eindimensionale Kette mit  $N$  Plätzen, der Gitterkonstante  $a$  und einer Nächster-Nachbar-Wechselwirkung wird durch den Hamilton-Operator

$$H = \sum_{i=1}^N \epsilon_i |i\rangle\langle i| - \sum_{i=1}^{N-1} V_{i,i+1} (|i\rangle\langle i+1| + |i+1\rangle\langle i|). \quad (4.1)$$

beschrieben.  $\epsilon_i$  ist die Bindungsenergie am Gitterplatz  $i$  und  $V_{i,i+1}$  ist das Tight-Binding-Transferintegral zwischen den elektronischen Niveaus an den Gitterplätzen  $i$  und  $i+1$ . Ein Zufallspotential wird dann durch einen Satz von entsprechend verteilten  $\{\epsilon_i\}$  und  $\{V_{i,i+1}\}$  modelliert.

Außerdiagonale Unordnung, d. h. eine Zufallsverteilung für  $V_{i,i+1}$  bei fester Bindungsenergie, führt zu Modellen der Quantenperkolation<sup>54, 85, 142</sup>.

Im hier betrachteten Modell mit diagonalen Unordnung, dem Anderson-Modell, genüge  $\epsilon_i$  einer Kastenverteilung, d. h.  $\epsilon_i$  sei eine im Intervall  $[-W/2, W/2]$  gleichverteilte, unkorrelierte Zufallsvariable und das Hopping-Matrixelement  $V_{i,i+1} \equiv V$  sei konstant. Im Falle  $W/V = 0$  wird die Translationsinvarianz wieder hergestellt und man erhält ausgedehnte Zustände. Im entgegengesetzten Limes  $W/V \rightarrow \infty$  wird das Transferintegral vernachlässigbar gegenüber den Energiedifferenzen und die Eigenzustände werden an den Gitterplätzen vollständig lokalisiert.

Die Idee, daß Unordnung in Form von Zufallspotentialen in dreidimensionalen Metallen zur Lokalisierung von Elektronen führt, wurde zum ersten Mal von P. W. Anderson<sup>4</sup> vorgeschlagen. Er konnte zeigen, daß die Eigenzustände der Elektronen lokalisiert werden, wenn die Amplitude des Zufallspotentials groß genug im Vergleich zur Übergangsamplitude der Elektronen zwischen den Atomen ist. Bei einer kritischen Unordnung erfolgt dann ein Übergang vom Metall zum Isolator.

N. F. Mott und W. D. Twose<sup>124</sup> schlugen vor, daß die elektronischen Eigenzustände eines eindimensionalen ungeordneten Systems *immer* vollständig lokalisiert sind. Als Folge davon verschwindet die statische Leitfähigkeit auch im Grenzfall beliebig schwacher Unordnung.

Die Frage nach der Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Frequenz konnte von N. F. Mott<sup>125, 126</sup> mit einem intuitiven Argument beantwortet werden: Der Ausdruck für die Kubo-Leitfähigkeit in der Form

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2\pi}{v}\omega \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} |\mathbf{x}_{\alpha\beta}|^2 [f(E_{\alpha}) - f(E_{\beta})] \delta(E_{\alpha} - E_{\beta} - \hbar\omega) \quad (4.2)$$

ist proportional zu  $\omega^2$ . Ein Faktor  $\omega$  ist explizit gegeben, der andere ist implizit im Faktor  $f(E_{\alpha}) - f(E_{\beta})$  enthalten. Bei exponentiell lokalisierten Zuständen hat der Ortsoperator  $\mathbf{x}$  endlich Matrixelemente. Bei kleinen Frequenzen wird die Summe von *den* lokalisierten Zuständen dominiert, die gerade so weit auseinanderliegen, daß ihre resonante Niveaufspaltung gerade von der Ordnung  $\omega$  ist. Bei exponentiell lokalisierten Zuständen ist dieser Abstand proportional zu  $\ln(\omega)$ . Damit erhält man für die Frequenzabhängigkeit bei kleinen Frequenzen

$$\sigma(\omega) \propto \omega^2 \ln^{d+1} \omega. \quad (4.3)$$

V. L. Berezinskiĭ<sup>22</sup> sowie A. A. Abrikosov und I. A. Ryzhkin<sup>2</sup> zeigten, daß die exakte Lösung in einer Dimension ( $d = 1$ ) bei kleinen Frequenzen genau diese Form hat. V. L. Berezinskiĭ<sup>22</sup> fand für die dynamische Leitfähigkeit  $\sigma(\omega)$  im eindimensionalen Zufallspotential eine analytische Lösung, die im Limes schwacher Unordnung ( $\varepsilon_F\tau/\hbar \gg 1$ ) und schwacher Streuung (d. h. die Bornsche Näherung gilt für jeden Streuer) asymptotisch exakt wird.  $\tau$  ist hierbei die Relaxationszeit der Elektronen im Drude-Modell.

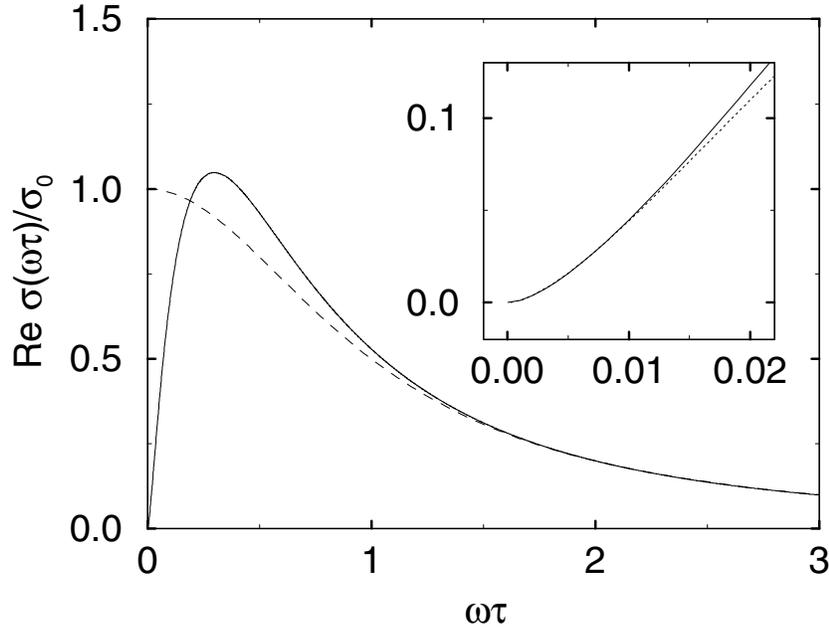
Seine Lösung gilt für alle  $\omega\tau$  und bestätigt das von N. F. Mott vorgeschlagene Niederfrequenzverhalten. Sie kann jedoch nicht geschlossen, sondern nur in Form zweier gekoppelter, linearer Rekursionsgleichungen angegeben werden. Im Anhang A ist der Algorithmus angegeben mit dem diese einfach numerisch gelöst werden können. Das so gewonnene asymptotisch exakte Resultat ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Bei Frequenzen  $\omega\tau \gtrsim 1.5$  findet man bereits eine gute Übereinstimmung mit dem asymptotischen Drude-Verhalten

$$\text{Re } \sigma(\omega\tau) = \sigma_0 / (1 + (\omega\tau)^2), \quad (4.4)$$

das zum Vergleich gestrichelt eingezeichnet ist.  $\sigma_0 = ne^2\tau/m$  ist dabei die Drude-Leitfähigkeit. Das Verhalten bei kleinen Frequenzen wird durch die asymptotische Entwicklung

$$\sigma(\omega\tau) \approx 2\sigma_0(4\omega\tau)^2 \left[ \ln^2(4\omega\tau) - \frac{\pi}{4} + (2C - 3) \ln(4\omega\tau) + \dots \right] \quad (4.5)$$

beschrieben, wobei  $C = 0.5772\dots$  die Eulersche Konstante ist. Dieser analytische Ausdruck ist, wie A. A. Gogolin und V. I. Melnikov<sup>56</sup> bereits angemerkt haben, nur in einem sehr kleinen Bereich  $\omega\tau \lesssim 0.01$  gültig. Im kleinen Ausschnittsbild von Abbildung



**Abbildung 4.1:** Asymptotisch exakte Lösung für  $\sigma(\omega)$  nach V. L. Berezinskiĭ, berechnet mit der im Anhang A beschriebenen Methode. Das kleine Ausschnittsbild zeigt das Niederfrequenzverhalten. Zum Vergleich ist die asymptotische Entwicklung 4.5 gepunktet eingezeichnet.

4.1 ist die asymptotische Entwicklung (4.5) gepunktet eingezeichnet. Bei größeren Frequenzen  $0.01 \lesssim \omega\tau \lesssim 0.06$  zeigt Berezinskiĭs Lösung einen annähernd linearen Anstieg in  $\sigma(\omega)$ .

Um das Motttsche  $\sigma(\omega) \propto \omega^2 \ln^2 \omega$  Verhalten *eindeutig* mittels einer numerischen Berechnung nachweisen zu können, muß einerseits der Bereich der Krümmung  $\omega\tau \lesssim 0.01$ , andererseits der Bereich des linearen Anstiegs  $\omega\tau \gtrsim 0.01$  nachgewiesen werden.

Für das angegebene Modell (4.1) erhält man für die mittlere Streuzzeit der Elektronen in niedrigster Bornscher Näherung\*

$$\tau = \frac{12V\hbar}{W^2}. \quad (4.6)$$

Definiert man die Masse durch  $m = \hbar k_F/v_F$ , dann erhält man mit der Fermi-Energie  $\varepsilon_F = 2V$  und  $k_F = \pi/a$  für die Drude-Leitfähigkeit

$$\sigma_0 = \frac{n e^2 \tau}{m} = 48 \left( \frac{e^2 a}{\pi \hbar} \right) \left( \frac{V}{W} \right)^2. \quad (4.7)$$

Mit den Zahlenwerten  $W = V = 1$  folgt

$$\varepsilon_F \tau / \hbar = 24 \gg 1. \quad (4.8)$$

---

\*Man muß in der Herleitung beachten, daß die Transportzeit in einer Dimension durch die halbe Quasiteilchenlebensdauer gegeben ist.

In diesem Bereich sollten V. L. Berezinskiis Voraussetzungen schwacher Unordnung gut erfüllt sein. Die im folgenden Abschnitt gezeigten numerischen Rechnungen wurden deshalb bei diesen Parametern durchgeführt.

R. L. Bush<sup>32</sup> berechnete  $\sigma(\omega)$  numerisch auf der Basis von Integralgleichungen für die dielektrische Funktion  $\epsilon(q, \omega)$ , konnte aber nicht genügend Genauigkeit erzielen, um den Unterschied zwischen  $\omega^2$  und  $\omega^2 \ln^2 \omega$  Verhalten aufzulösen.

R. C. Albers und J. E. Gubernatis<sup>3</sup> berechneten die dynamische Leitfähigkeit für Ketten bis zur Länge 400 direkt mit Hilfe der Kubo-Formel und numerischer Bestimmung des vollständigen Eigensystems des Hamilton-Operators. Bei kleiner Unordnung  $W/V = 1$  und Systemen dieser Größe war es ihnen jedoch nicht einmal möglich die verschwindende Leitfähigkeit bei  $\omega = 0$  zu beobachten.

A. MacKinnon<sup>110</sup> zeigte, daß für die Bestimmung der statischen Leitfähigkeit im eindimensionalen Anderson-Modell bereits Ketten der Länge  $10^5$  nötig sind um eine Genauigkeit von 10 % zu erreichen.

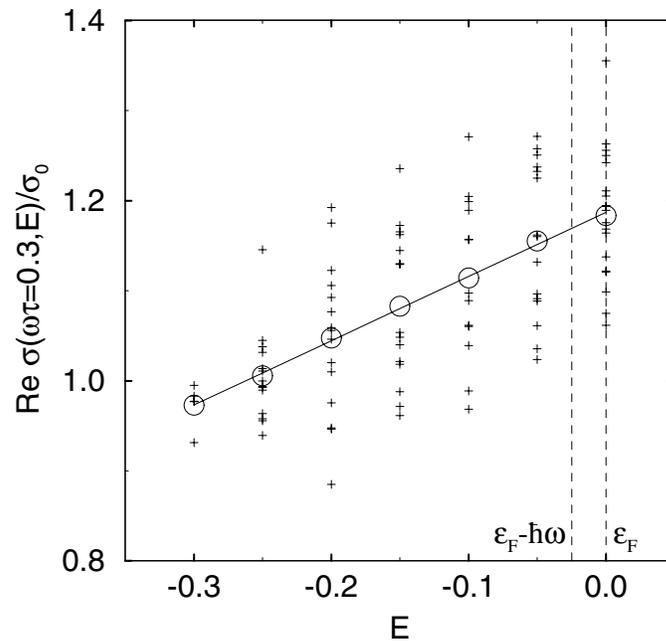
Numerische Studien von T. Saso et al.<sup>146, 147</sup>, die auf dem MacKinnonschen (speziell auf das eindimensionale Problem zugeschnittene) Iterationsverfahren basieren, konnten einen quantitativen Nachweis für das  $\omega^2 \ln^2 \omega$  Verhalten ebenso noch nicht führen. Zum einen sind die betrachteten Systeme mit  $N = 10^6$  immer noch zu klein, zum anderen wurden hier nur Frequenzen  $\omega\tau \gtrsim 0.05$  betrachtet (vgl. Anmerkung vorher und Abb. 4.1). Ebenso wenig wurde der wichtige Einfluß des Infinitesimalparameters  $\varepsilon$  genau genug kontrolliert. In der zitierten Arbeit wurde bei schwacher Unordnung  $W/V = 1$  und  $\varepsilon > 0.001$  eine qualitativ gute Übereinstimmung mit der von V. L. Berezinskii angegebenen Lösung im Bereich  $0.05 < \omega\tau < 2$  gefunden.

Diese Übereinstimmung bei  $W/V = 1$  ist ein Artefakt aufgrund der zu geringen Systemgrößen und eines zu großen Infinitesimalparameters. Es zeigt sich, daß Systemgrößen von  $N \gtrsim 10^8$  und entsprechend kleine Infinitesimalparameter,  $\varepsilon \lesssim 5 \times 10^{-5}$ , nötig sind, um im eindimensionalen Problem *quantitative* Aussagen über die dynamische Leitfähigkeit zu treffen, insbesondere um das Mottsche  $\sigma(\omega) \propto \omega^2 \ln^2 \omega$  Verhalten bei kleinen Frequenzen definitiv nachzuweisen.

## 4.2 Ergebnisse der Modellrechnungen

Im folgenden wird nur der Fall schwacher Unordnung  $W/V = 1$  untersucht. Die Fermi-Kante liegt in der Bandmitte bei  $\varepsilon_F = 0$ .

Mit der im vorigen Kapitel entwickelten Rekursionsmethode (3.8-3.12) wird der Beitrag zur dynamischen Leitfähigkeit  $\text{Re } \sigma(\omega, E, \varepsilon)$  bei vorgegebener Energie  $E$  berechnet. Die Leitfähigkeit selbst ist erst durch die Mittelung über das Energieintervall  $[\varepsilon_F - \hbar\omega, \varepsilon_F]$  um die Fermikante  $\varepsilon_F$  gegeben (Gleichung 3.8). Zunächst soll überprüft werden, daß die  $E$ -Abhängigkeit im Rahmen der erstrebten Genauigkeit völlig vernachlässigbar ist (wie auch in Kapitel 6 im Falle des Quanten-Hall-Systems) und daß deshalb die Gleichung



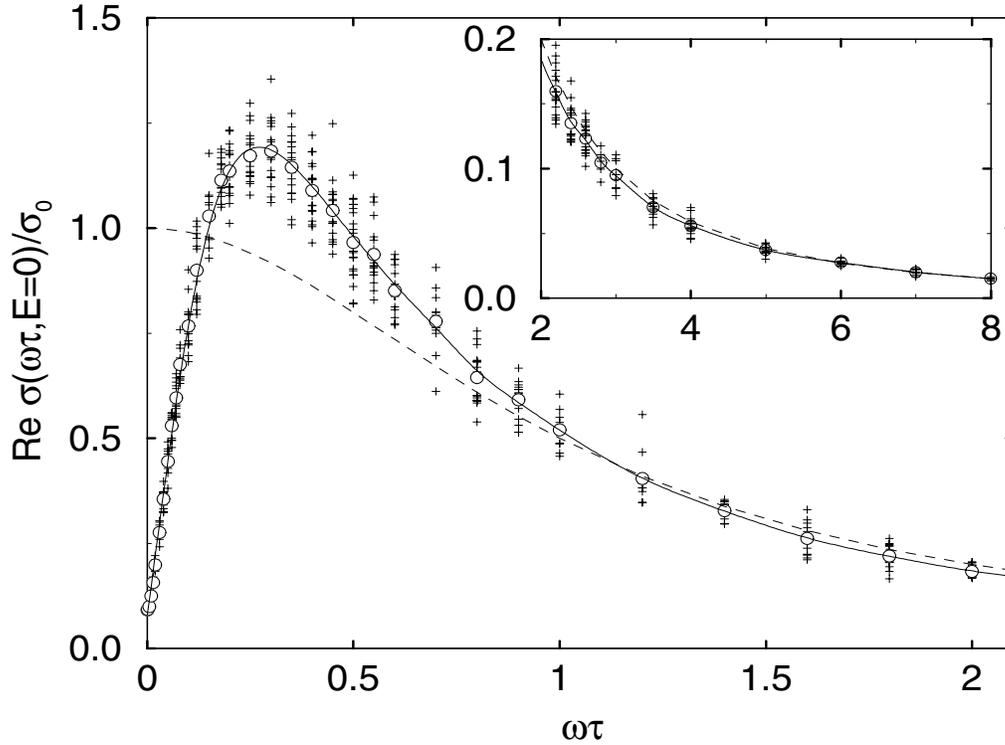
**Abbildung 4.2:** Die Abhängigkeit von  $\text{Re } \sigma(\omega, E)$  von der Energie  $E$  bei fester Frequenz  $\omega\tau = 0.3$  für  $W = V = 1$  und  $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$ . Aus den nach  $N = 2 \times 10^7$  Iterationen erhaltenen Datenpunkten (+) wurden die Mittelwerte (o) berechnet. Die durchgezogene Linie deutet das lineare Verhalten an. Die  $E$ -Abhängigkeit in der Mittelung von  $\text{Re } \sigma(\omega\tau)$  ist in dem durch gestrichelte Linien markierten Energiebereich  $[\varepsilon_F - \hbar\omega, \varepsilon_F]$  vernachlässigbar.

(3.13) bereits die dynamische Leitfähigkeit ergibt.

Am deutlichsten ist die  $E$ -Abhängigkeit in der Nähe des Maximums der Leitfähigkeit sichtbar (vgl. Abbildung 4.3). Bei fester Frequenz  $\omega\tau = 0.3$  und  $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$  wurde  $\sigma_N(\omega, E, \varepsilon)$  für Systeme mit  $N = 2 \times 10^7$  Gitterplätzen berechnet (Abbildung 4.2 (+)) und über mehrere Realisierungen gemittelt, so daß ein zuverlässiger Mittelwert (o) erhalten werden konnte. Der Beitrag zur dynamischen Leitfähigkeit nimmt in etwa linear mit dem Abstand von der Fermi-Kante ab. Innerhalb des zu mittelnden Bereiches (gestrichelte Linien) ist die  $E$ -Abhängigkeit im Vergleich zur Genauigkeit des Mittelwertes über verschiedene Ensemble (o) bei  $\varepsilon_F = 0$  völlig vernachlässigbar. Die dynamische Leitfähigkeit kann deswegen bereits präzise aus der Iteration bei *einer* Energie ( $\varepsilon_F = 0$ ) gewonnen werden.

In Abbildung 4.3 ist  $\text{Re } \sigma(\omega\tau, E)/\sigma_0$  für Ketten der Länge  $N = 2 \times 10^7$  und  $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$  dargestellt. Bei  $\omega\tau = 0$  bleibt eine endliche Leitfähigkeit aufgrund des endlichen Wertes von  $\varepsilon$  erhalten. Das asymptotische Drude-Verhalten wird erst bei großen Frequenzen  $\omega\tau \gtrsim 5$  erreicht (kleines Bild).

Um das Mott-Verhalten im Limes  $\omega \rightarrow 0$  nachzuweisen, wurden auch Systeme der Größe  $N = 10^8$  betrachtet. Der Infinitesimalparameter kann in diesem Fall bis auf  $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$  verringert werden. Die Resultate für Frequenzen  $\omega\tau \leq 0.02$  sind in

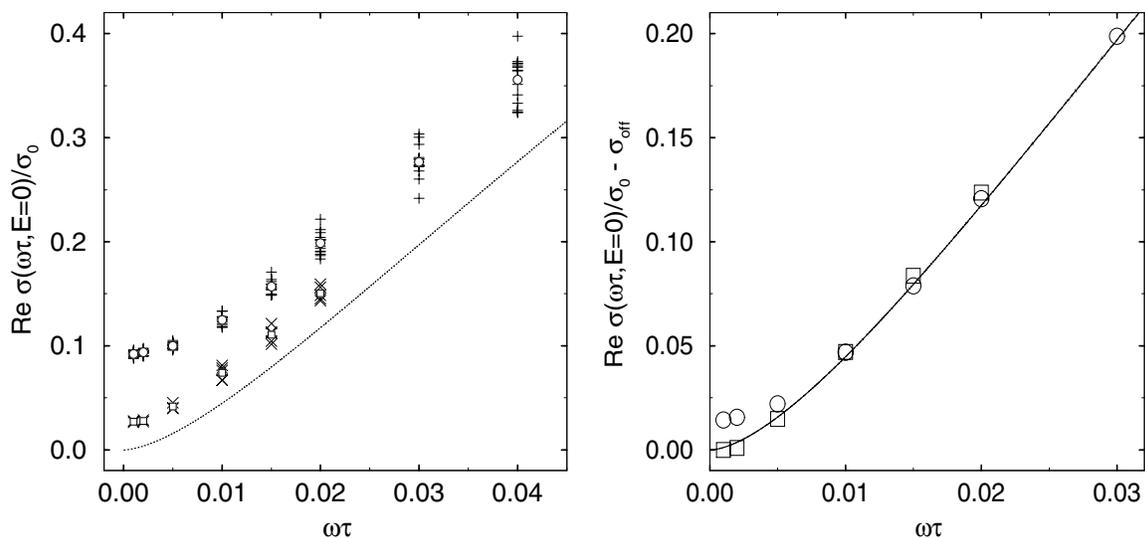


**Abbildung 4.3:** Dynamische Leitfähigkeit  $\text{Re } \sigma(\omega\tau, E=0)/\sigma_0$  für das 1D-Anderson Modell mit  $W = V = 1$ ,  $E = 0$  und  $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$ , wobei  $\sigma_0 = ne^2\tau/m$  die Leitfähigkeit und  $\tau$  die Relaxationszeit der Elektronen im Drude-Modell ist. Pro Datenpunkt (+) wurden  $N = 2 \times 10^7$  Iterationen durchgeführt. Die durchgezogene Linie interpoliert die zu gleichen  $\omega\tau$ , aus jeweils 10 – 30 Iterationsfolgen, berechneten Mittelwerte (o). Zum Vergleich das Drude-Verhalten (gestrichelt).

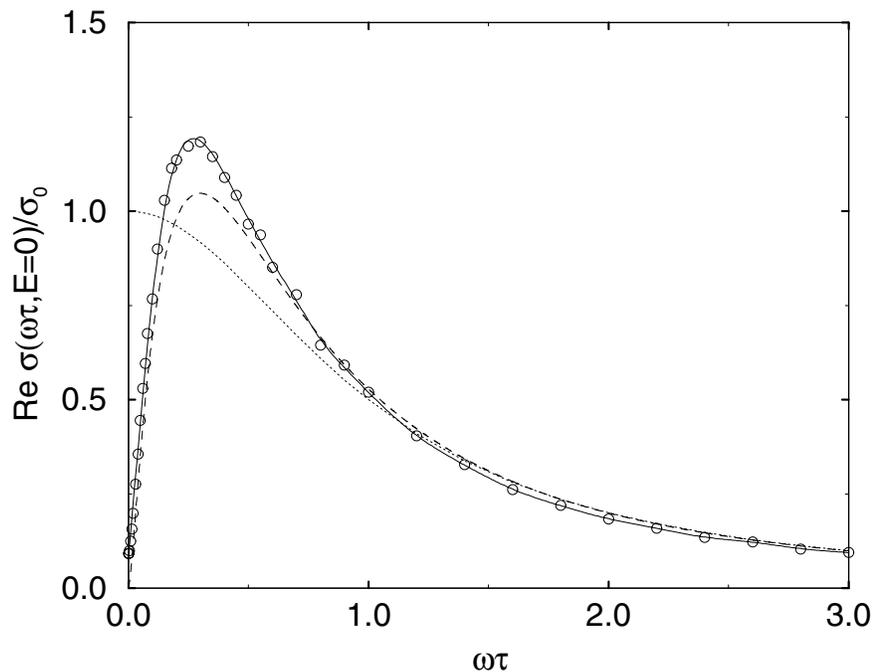
Abbildung 4.4 zusammen mit den Berechnungen bei  $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$  dargestellt. Zum Vergleich ist V. L. Berezinskiis asymptotisch exakte Lösung gepunktet dargestellt.

Zu den berechneten Kurven aus Abbildung 4.4 (links) kann ein konstanter Offset addiert werden, so daß diese mit V. L. Berezinskiis Lösung zur Deckung gebracht werden können. Dies zeigt, daß bei sehr kleinen  $\omega\tau$  der Infinitesimalparameter  $\varepsilon$ , im Rahmen der erzielbaren Genauigkeit nur noch einen *konstanten* Beitrag zur Leitfähigkeit verursacht, die funktionale Form aber nicht ändert. Nur bei  $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$  ist noch zu sehen, daß der endliche Wert zu einer stärkeren „Abrundung“ als im tatsächlichen  $\omega^2 \ln^2 \omega$  Verhalten führt.

Bei der schwachen Unordnung  $W/V = 1$  sind die Voraussetzungen für die Bornsche Näherung offensichtlich noch nicht ausreichend gut erfüllt. Es sind signifikante Abweichungen von der für schwache Unordnung asymptotisch exakten Theorie sichtbar, vor allem in der Nähe des Maximums der Leitfähigkeit (Abbildung 4.5). Auch ist der Übergang zum Drude-Verhalten erst bei deutlich größeren Frequenzen,  $\omega\tau \gtrsim 5$ , zu sehen (Abbildung 4.3, kleines Bild).



**Abbildung 4.4:** Verhalten von  $\text{Re } \sigma(\omega\tau)/\sigma_0$  bei kleinen Frequenzen. Es ist  $W = V = 1$  bei  $E = 0$  mit  $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$  und  $N = 2 \times 10^7$  (+), sowie mit  $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$  und  $N = 10^8$  (x). Die gemittelten Werte sind durch (o) bzw. (□) gekennzeichnet. Zum Vergleich ist V. L. Berezinskiĭs asymptotisch exakte Lösung dargestellt (gestrichelt). Rechts wurde ein konstanter Offset subtrahiert, so daß die Daten mit der exakten Lösung zur Deckung gebracht werden.



**Abbildung 4.5:** Dynamische Leitfähigkeit  $\text{Re } \sigma(\omega\tau)/\sigma_0$  für das 1D-Anderson Modell mit  $W = V = 1$ ,  $E = 0$  und  $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$ . Berezinskiĭs analytische Lösung ist gestrichelt dargestellt. Zum Vergleich ist auch das Drude-Verhalten gepunktet eingezeichnet.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß zur präzisen Berechnung der dynamischen Leitfähigkeit im eindimensionalen Anderson-Modell größere Systeme ( $N \gtrsim 10^8$ ) nötig sind, als bislang angenommen wurde. Der Einfluß des Infinitesimalparameters  $\varepsilon$  muß dabei immer *systematisch* durch den Vergleich der Resultate für verschiedene Werte untersucht werden, um Artefakte zu vermeiden. Die in Abbildung 4.4 dargestellten Ergebnisse zeigen klar das Mott'sche  $\sigma(\omega) \propto \omega^2 \ln^2 \omega$ -Verhalten und im Bereich  $\omega\tau \lesssim 0.02$  quantitative Übereinstimmung mit dem asymptotisch exakten Resultat von V. L. Berezinskiĭ. Bei der Untersuchung des Niederfrequenzverhaltens zeigte sich, daß für „genügend“ kleine Infinitesimalparameter das funktionale Verhalten der frequenzabhängigen Leitfähigkeit bis auf einen konstanten, d. h. frequenzunabhängigen Beitrag, nicht mehr von  $\varepsilon$  beeinflusst wird.

Bei ungeordneten zweidimensionalen Systemen im starken Magnetfeld tritt zum Unterschied ein Lokalisierungs-Delokalisierungs-Phasenübergang auf, wenn das Fermi-Niveau bei einer kritischen Energie  $E^c$  liegt. Damit verbunden, treten in der dynamischen Leitfähigkeit *Potenzgesetze* anstatt des  $\omega^2 \ln^2 \omega$ -Verhaltens auf. Gerade hier erweist sich die Möglichkeit der Subtraktion des für kleine  $\varepsilon$  konstanten Offsets als sehr nützlich für die genauere Bestimmung der Potenz.

Nachdem sich das Iterationsverfahren als Methode der Wahl in der Berechnung mesoskopischer Systeme in einer Dimension bewährt hat, soll in den folgenden Abschnitten das wesentlich komplexere Problem des Lokalisierungs-Delokalisierungs-Überganges bei Quanten-Hall-Bedingungen untersucht werden.

# 5

## Multifraktalität

In jüngerer Zeit wurden zahlreiche physikalische Größen beobachtet, die nicht den konventionellen Skalengesetzen gehorchen. Charakteristisch sind dabei breite Verteilungen der untersuchten Observablen, z.B. der Wachstumswahrscheinlichkeit bei der DLA (Diffusion Limited Aggregation), der Verteilung des Spannungsabfalles in Random Resistor Networks oder der Wahrscheinlichkeitsdichte bei Random Walks auf Fraktalen<sup>30, 31, 134, 156</sup>.

In allen Fällen können die Momente der Verteilungen nicht durch einen einzigen Exponenten, sondern nur durch eine unendliche Hierarchie von Exponenten charakterisiert werden. Zum Beispiel weisen die Momente der Wellenfunktion  $P^{(q)} = \int d^d r |\Psi(\mathbf{r})|^{2q}$  bei einem Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang jeweils ein anderes Skalenverhalten für verschiedene  $q = 1, 2, 3, \dots$  auf (siehe Abschnitt 5.3). Dieses Phänomen wurde zum ersten Mal von B. B. Mandelbrot im Zusammenhang mit vollständig entwickelter Turbulenz<sup>115</sup> beschrieben und ist heute unter dem Neologismus *Multifraktalität* bekannt.

Die ursprüngliche Bedeutung des Begriffs „Multifraktal“ führt zu der Frage nach den Bildungsprozessen von multifraktalen Strukturen hin. Es zeigt sich, daß *multiplikative* Kaskaden von Zufallsprozessen im allgemeinen auf *multifraktale* Strukturen führen, während *additive* Prozesse in der Regel einfache Fraktale erzeugen<sup>31, 156</sup>.

Da der im 6. Kapitel untersuchte Lokalisierungs-Delokalisierungs-Phasenübergang (LD) von elektronischen Wellenfunktionen unter Quanten-Hall-Bedingungen solche multifraktale Eigenschaften aufweist, werden in diesem Abschnitt die benötigten Begriffe kurz eingeführt und der Zusammenhang zwischen fraktalen Dimensionen und kritischen Exponenten, die in der Beschreibung des LD-Phasenüberganges später benötigt werden, hergestellt.

### 5.1 Die fraktalen Dimensionen

Die fraktale Dimension ist der grundlegende Begriff zur Beschreibung von Strukturen, die eine Skalensymmetrie besitzen. Skalensymmetrie bedeutet Selbstähnlichkeit des Objektes unter verschiedener Vergrößerung bei der Beobachtung.

Der historisch erste Dimensionsbegriff, der ein Maß für das Vermögen den Raum zu füllen gibt und nicht-ganzzahlige Dimensionen zuläßt, wurde von F. Hausdorff<sup>63</sup> ein-

geführt. Das  $D$ -dimensionale Hausdorff-Maß auf einer Menge  $S$

$$M_D(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{r_k < \varepsilon} \sum_k r_k^D, \quad D > 0, \text{ reel} \quad (5.1)$$

definiert die optimale Überdeckung dieser Menge mit Hilfe von Kugeln mit variablen Radien  $r_k$ . Als *Hausdorff-Dimension*  $D_H$  wird diejenige Dimension  $D$  bezeichnet, bei der  $M_D$  von  $\infty$  nach 0 springt.

In der Praxis wesentlich einfacher zu handhaben sind jedoch Box-Dimensionen, z.B. die von A. N. Kolmogorov<sup>94</sup> eingeführte *Kapazitätsdimension*  $D_C$ , die von einer Zerlegung des Fraktals in *gleich große* Würfel der Kantenlänge  $\varepsilon$  ausgeht

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon}. \quad (5.2)$$

$N(\varepsilon)$  bezeichnet dabei die minimale Anzahl zur Überdeckung benötigter Würfel. Leider stimmen  $D_H$  und  $D_C$  bereits bei einfachen Mengen nicht überein. So ist etwa für die Menge der rationalen Zahlen auf  $[0, 1]$   $D_H = 0$ , jedoch  $D_C = 1$ .

Bezeichnet man mit  $P_i(\varepsilon)$  die Wahrscheinlichkeit einen Punkt des Fraktals im  $i$ -ten Würfel der Größenskala  $\varepsilon$  zu finden, dann ist die *Informationsdimension*  $D_I$

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-P_i(\varepsilon) \ln P_i(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon}. \quad (5.3)$$

Die *Korrelationsdimension*  $D_K$  (P. Grassberger, I. Proccacia<sup>57</sup>) schließlich ist definiert durch

$$D_K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\ln C(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} \quad (5.4)$$

mit dem Korrelationsintegral

$$C(\varepsilon) = \int_{|\mathbf{r}| < \varepsilon} d^d r \, c(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad c(\mathbf{s}) = \iint d\mu(\mathbf{x}_1) d\mu(\mathbf{x}_2) \, \delta^d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - \mathbf{s}). \quad (5.5)$$

$c(\mathbf{s})$  stellt die Wahrscheinlichkeitsdichte für einen vorgegebenen Abstand zweier beliebiger Vektoren  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  dar.

Im allgemeinen unterscheiden sich diese Dimensionen bei einem fraktalen Objekt. Nur im Fall *einfacher Fraktale* genügt eine einzige fraktale Dimension  $D_F \equiv D_C = D_I = D_K = D_H$ . Einen „eindeutigen Fingerabdruck“ eines multifraktalen Objektes erhält man erst durch die Einführung einer unendlichen Hierarchie von fraktalen Dimensionen (H. G. E. Hetschel, P. Grassberger, I. Proccacia<sup>57, 64</sup>).

Dazu betrachtet man ein  $d$ -dimensionales System (den Träger eines Maßes  $\mu$ ), das man in  $d$ -dimensionale Würfel der Kantenlänge  $\varepsilon$  zerlegt. Mit  $P_i(\varepsilon) = \int_i d\mu(x)$  wird das integrierte Maß auf dem  $i$ -ten Würfel der Kantenlänge  $\varepsilon$  bezeichnet, z.B. die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons in diesem Volumenelement. Man definiert eine „Zustandssumme“

$$Z_q(\varepsilon) = \sum_i^{N_i(\varepsilon)} P_i^q. \quad (5.6)$$

Die *Reyni-Information  $q$ -ter Ordnung*<sup>20</sup> ist gegeben durch

$$I_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \ln Z_q(\varepsilon). \quad (5.7)$$

Die *verallgemeinerte fraktale Dimension  $q$ -ter Ordnung* wird dann definiert durch

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_q}{\ln 1/\varepsilon}. \quad (5.8)$$

Mit dieser Definition erhält man für ganzzahlige  $q$  sofort die bereits früher eingeführten fraktalen Dimensionen als Spezialfälle. Die Kapazitätsdimension ist

$$D_C = \lim_{q \rightarrow 0} D_q = D_0, \quad (5.9)$$

die Informationsdimension ist

$$D_I = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = D_1, \quad (5.10)$$

und die Korrelationsdimension erhält man aus

$$D_K = \lim_{q \rightarrow 2} D_q = D_2. \quad (5.11)$$

Die verallgemeinerte Dimension  $D_q$  ist für alle reellen  $q$  definiert und bildet eine monoton fallende Funktion in  $q$ . Es existiert eine untere und eine obere Grenzdimension  $D_{-\infty}$  und  $D_{\infty}$ , die den Bereichen der Menge entsprechen, in denen das Maß am „ausgedünntesten“, bzw. am „dichtesten“ ist.

Man kann allgemein zeigen<sup>157</sup>, daß auf dem maßtheoretischen Träger, d. h. der Menge, auf der das Maß konzentriert ist, die Hausdorff-Dimension gleich der Informationsdimension ist, also  $D_H = D_I = D_1$ .

Ebenso allgemein gilt auf dem Abschluß einer selbstähnlichen Menge  $D_H = D_C = D_0$ . Da man in der Physik üblicherweise mit abgeschlossenen Mengen zu tun hat, wird meist die Kapazitätsdimension  $D_0$  als „Hausdorff-Dimension“ bezeichnet (manchmal allerdings auch  $D_1$ ).

Allgemein gültig ist auch die Relation

$$d \geq D_C \geq D_H \geq D_I \geq D_{q>1} \geq d_T, \quad (5.12)$$

wobei  $d$  die euklidische Dimension und  $d_T$  die topologische Dimension bezeichnet (diese beiden sind ganzzahlig).

## 5.2 Das Spektrum eines Multifraktals

Eine anschauliche Vorstellung über die innere Struktur eines Multifraktals erhält man durch die Einführung des  $f(\alpha)$  Spektrums (T. C. Halsey et al.<sup>61</sup>). Man geht dazu von der Vorstellung aus, daß die integrierten Maße  $P_i(\varepsilon)$  individuell mit

$$P_i(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\alpha_i} \quad (5.13)$$

skalieren.  $\alpha_i$  entspricht also etwa der fraktalen Dimension am Ort  $i$  und diese kann von Ort zu Ort variieren. Die Anzahl  $dN_\alpha$  der Würfel in denen  $\alpha_i$  einen Wert zwischen  $\alpha$  und  $\alpha + d\alpha$  annimmt, verhält sich nach der Skalenhypothese wie

$$dN_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{-f(\alpha)} n(\alpha) d\alpha. \quad (5.14)$$

$f(\alpha)$  entspricht damit der fraktalen Dimension der Untermenge in der  $\alpha_i$  gleich  $\alpha$  ist. Für die Zustandssumme (5.6) folgt also

$$Z(q) = \int d\alpha n(\alpha) \varepsilon^{-f(\alpha)+q\alpha}. \quad (5.15)$$

Im Limes kleiner  $\varepsilon$  wird das Integral von dem Wert  $\alpha_q$  dominiert, der  $q\alpha - f(\alpha)$  minimiert, und kann mit Hilfe der Sattelpunkt-Approximation ausgewertet werden. Daraus folgt der Zusammenhang mit den verallgemeinerten fraktalen Dimensionen  $D_q$  aus (5.6-5.8). Die Zustandssumme skaliert wie

$$Z(q) \propto \varepsilon^{\tau_q} \quad \text{mit} \quad \tau_q = (q-1)D_q, \quad (5.16)$$

wobei  $f(\alpha_q)$  mit  $\tau_q$  über eine Legendre-Transformation<sup>\*</sup> verknüpft ist

$$f(\alpha_q) = q\alpha_q - \tau_q \quad (5.17a)$$

$$\alpha_q = \frac{d\tau_q}{dq}. \quad (5.17b)$$

Deshalb enthält das  $f(\alpha)$ -Spektrum die gleiche Information wie  $D_q$ .  $\tau_q$  wird als *Korrelationsexponent* oder *Massenexponent  $q$ -ter Ordnung* bezeichnet. Nach dieser Interpretation kann man sich ein Multifraktal als ein verwobenes Ensemble von unabhängigen einfachen Fraktalen der Dimension  $f(\alpha_i)$  vorstellen, wobei auf jedem dieser Fraktale  $i$  die Observable  $P$  mit dem Lipschitz-Hölder-Exponenten  $\alpha_i$  skaliert.

Die direkte Bestimmung der  $D_q$  mit Hilfe von (5.6-5.8) und daraus die Gewinnung von  $f(\alpha_q)$  über die Legendre-Transformation ist problematisch. A. Chhabra und R. V. Jensen<sup>42</sup> entwickelten deshalb eine einfache und präzisere Methode zur direkten Bestimmung des  $f(\alpha)$ -Spektrums von multifraktalen Strukturen. Dazu wird zuerst eine einparametrische Schar von normierten Maßen  $\mu_i(q)$  definiert

$$\mu_i(q, \varepsilon) = \frac{[P_i(\varepsilon)]^q}{\sum_j [P_j(\varepsilon)]^q}. \quad (5.18)$$

Der Parameter  $q$  stellt eine Art Mikroskop dar, das verschiedene Bereiche des Fraktals „herausvergrößert“. Für  $q > 1$  werden die stärker singulären Strukturen verstärkt, für  $q < 1$  werden die weniger singulären Bereiche herausgegriffen, und bei  $q = 1$  repliziert  $\mu(1)$  das ursprüngliche Maß. Die Informationsdimension des Trägers von  $\mu(q)$  ist dann

$$f(q) = \frac{\sum_i \mu_i(q, \varepsilon) \ln \mu_i(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (5.19)$$

---

<sup>\*</sup>B. B. Mandelbrot<sup>31</sup> diskutiert Einschränkungen der Allgemeinheit dieses Zusammenhanges.

und die mittlere Stärke der Singularität  $\alpha_i = \ln P_i(\varepsilon) / \ln \varepsilon$  ist

$$\alpha(q) = \frac{\sum_i \mu_i(q, \varepsilon) \ln P_i(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (5.20)$$

Man zeigt, daß die so eingeführten  $f(q)$  und  $\alpha(q)$  mit unseren vorigen Definitionen (5.13,5.14) übereinstimmen. Aus der mittels (5.18-5.20) gewonnenen  $f(\alpha)$ -Kurve können dann mit Hilfe von (5.16,5.17a) leicht die verallgemeinerten fraktalen Dimensionen  $D_q$  berechnet werden. Die typische Form der Spektren und Dimensionen illustrieren die in Abschnitt 7.3 aus Wellenfunktionen unter Quanten-Hall Bedingungen berechneten Kurven.

Interessant ist die formale Analogie zwischen  $Z(q)$  und dem thermodynamischen Formalismus der Zustandssumme  $Z(\beta)$ . Identifiziert man  $\tau(q) = \ln Z / \ln \varepsilon$  mit der freien Energie  $F = -\beta \ln Z(\beta)$ , so ist  $\alpha_q$  die Entsprechung zur Energie  $E$ , und die Legendre-Transformierte  $f(\alpha_q)$  das Analogon zur Entropie  $S$ . Der konvexe Graph der  $f(\alpha)$ -Kurve erinnert deshalb an die Auftragung der Entropie als Funktion der Energie.

Der Vollständigkeit halber werden noch einige allgemeine Eigenschaften der  $f(\alpha)$ -Kurve angegeben:  $f(\alpha)$  ist konvex mit einem einzigen Maximum bei  $q = 0$ , wobei  $f(\alpha_0) = D_0$  die Kapazitätsdimension ist. Bei  $q = \pm\infty$  ist die Steigung unendlich und  $\alpha_{\min} = D_\infty$ , bzw.  $\alpha_{\max} = D_{-\infty}$ . Bei  $q = 1$  findet man die Informationsdimension  $D_1 = f(\alpha_1) = \alpha_1$  mit  $f'(\alpha_1) = 1$ . Im Falle eines einfachen Fraktals schrumpft die  $f(\alpha)$ -Kurve auf einen Punkt zusammen.

### 5.3 Multifraktale beim Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang

Die wichtige Rolle von *fraktalen* Strukturen beim LD-Übergang, z. B. im Quanten-Hall-System, wurde zum ersten Mal von H. Aoki<sup>13</sup> erkannt. Er zeigte, daß die inverse Besetzungszahl

$$P^{(2)} = \int_{V_d} d^d r |\Psi(\mathbf{r})|^4 \quad (5.21)$$

am kritischen Punkt bei einem kontinuierlichen Phasenübergang mit einer Potenz  $d^* < d$  skalieren muß. Spätere, beim Quanten-Hall-System berechnete Wellenfunktionen<sup>15</sup> zeigten selbstähnliche, filamentartige Strukturen mit einer Hausdorff-Dimension  $D_C = 1.57 \pm 0.03$ . (Vergleiche auch Abbildung 7.2.)

C. Castellani und L. Peliti<sup>34</sup> führten eine verallgemeinerte inverse Besetzungszahl ein

$$P^{(q)} = \int_{V_d} d^d r |\Psi(\mathbf{r})|^{2q}, \quad (5.22)$$

für die sie im Rahmen eines nicht-linearen  $\sigma$ -Modell in drei Dimensionen (ohne Magnetfeld) nicht-triviales Skalenverhalten der Form

$$P^{(q)} \propto L^{-\tau_q^*} \quad (5.23)$$

am kritischen Punkt fanden — der erste Hinweis auf *multifraktale* Wellenfunktionen beim LD-Übergang.

Seither befaßten sich zahlreiche Arbeiten mit der multifraktalen Analyse des LD-Überganges, unter anderem beim dreidimensionalen Anderson-Modell<sup>148-152</sup> und beim Quanten-Hall-Effekt<sup>71, 79, 80, 131, 136</sup>.

Der Zusammenhang zwischen dem Exponenten  $\tau_q^*$  und dem Korrelationsexponenten  $\tau_q$  ergibt sich<sup>80</sup>, indem man  $P^{(q)}$  in einem Tight-Binding-Modell mit der Gitterkonstante  $a$  und der Systemgröße  $L$  auswertet, und das Resultat mit der Zustandssumme (5.6) identifiziert:

$$P^{(q)} \cong \sum_i |\Psi_i|^{2q} \equiv Z_q(a/L). \quad (5.24)$$

Diese Approximation wird im Limes  $L \rightarrow \infty$  immer genauer\*. Deshalb kann man unter der Annahme, daß die Selbstähnlichkeit im Limes  $L \rightarrow \infty$  erhalten bleibt, die Exponenten am kritischen Punkt identifizieren  $\tau_q^* = \tau_q$ .

### 5.3.1 Zusammenhang mit den Exponenten der Korrelationslänge $\nu$ und der inversen Besetzungszahl $\pi_q$

Da die Korrelationslänge die obere Cutoff-Länge darstellt, bis zu dem Potenzverhalten gefunden werden kann, gilt

$$P^{(q)} \propto \xi^{-\tau_q}. \quad (5.25)$$

Mit der Definition des kritischen Exponenten  $\nu$

$$\xi \propto (E - E^c)^{-\nu} \quad (5.26)$$

folgt

$$P^{(q)} \propto (E - E^c)^{\nu\tau_q}. \quad (5.27)$$

Damit kann F. Wegners<sup>165</sup> kritischer Exponent  $\pi_q$  für die verallgemeinerte inverse Besetzungszahl

$$P^{(q)} \propto (E - E^c)^{\pi_q} \quad (5.28)$$

durch  $\nu$  und die fraktalen Dimensionen  $D_q$  ausgedrückt werden. Man erhält damit den

Zusammenhang zwischen  $\pi_q$ ,  $\nu$  und  $D_q$

$$\pi_q = \nu D_q (q - 1). \quad (5.29)$$

Interessant ist, daß die Berücksichtigung dieser Relation auf den korrekten Wert von  $\nu$  in der störungstheoretischen Rechnung von S. Hikami<sup>67, 80</sup> führt. Aus seinem Resultat  $\pi_2 = 3.8 \pm 0.4$  folgt mit  $D_2 = 1.62 \pm 0.02$  für den kritischen Exponenten  $\nu = 2.4 \pm 0.3$ , und nicht wie fälschlicherweise angenommen  $\nu = 1.9$ , wenn statt  $D_2$  die euklidische Dimension eingesetzt wird!

---

\*Im Kontinuumsimes  $a \rightarrow 0$  bricht bei festem  $L$  jedoch die Selbstähnlichkeit zusammen, wenn  $a$  die mikroskopische Längenskala erreicht.

### 5.3.2 Zusammenhang mit dem Exponenten der anomalen Diffusion $\eta$

Das von J.T. Chalker<sup>35-40</sup> beobachtete anomale Diffusionsverhalten beim Quanten-Hall-System am kritischen Punkt äußert sich im Skalenverhalten der 2-Punkt-Green-Funktion

$$\overline{|G(E + i\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2} \propto |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\eta+2-d}. \quad (5.30)$$

Wegner<sup>165</sup> definiert eine ensemble-gemittelte inverse Besetzungszahl

$$P^{(2)}(E) = \overline{\sum_{n,r} |\Psi_n(\mathbf{r})|^4 \delta(E - E_n)} / \overline{\sum_n \delta(E - E_n)}. \quad (5.31)$$

Unter der Annahme, daß die Ensemble-Mittelung translationsinvariant ist, kann man  $P^{(2)}$  durch die ensemble-gemittelte 2-Punkt-Green-Funktion

$$\overline{|G(z, \mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2} = \overline{\left| \langle \mathbf{r} | \frac{1}{z - H} | \mathbf{r}' \rangle \right|^2} \quad (5.32)$$

ausdrücken. Mit der Zustandsdichte

$$\varrho(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int d^d r \overline{|G(E + i\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|^2}, \quad (5.33)$$

(festgehaltenes  $\mathbf{r}_0$ ), erhält man

$$P^{(2)}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon/\pi}{\varrho(E)} \overline{|G(E + i\varepsilon, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)|^2}. \quad (5.34)$$

Die Zustandsdichte ist beim Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang eine unkritische Größe, also skaleninvariant. Diese Eigenschaft von  $\varrho(E)$  wird im Abschnitt 6.2 noch numerisch mit großer Präzision überprüft werden. Mit diesen Voraussetzungen und dem Ansatz

$$\overline{|G(E + i\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0)|^2} = g(E, L) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-\eta+2-d} \quad (5.35)$$

erhält man

$$P^{(2)}(E) \propto g(E, L) \propto L^{\eta-2} \quad (5.36)$$

und schließlich mit (5.25) den

Zusammenhang zwischen  $\eta$  und  $D_2$

$$\eta = 2 - D_2. \quad (5.37)$$

# 6

## Modellrechnungen zum zweidimensionalen Magnetotransport

### 6.1 Das Random-Matrix-Modell

**E**in wichtiger Schritt in der präzisen Bestimmung des Skalenverhaltens stellt die Entwicklung des *Random-Matrix-Modelles* durch B. Huckestein und B. Kramer<sup>69</sup>, bzw. unabhängig davon durch B. Mieß<sup>119</sup> dar. In diesem Modell wird die vollständige Information über das Impurity-Potential auf wenige, aber wesentliche statistische Eigenschaften des Potentials reduziert. Dies basiert auf der Idee, daß das Skalenverhalten, etwa der Korrelationslänge oder der Leitfähigkeit, universell ist, also nicht von der individuellen Probe abhängen sollte. Aus dieser Informationsreduktion ergibt sich eine äußerst effiziente Methode zur Gewinnung der Potential-Matrixelemente, die erst die Untersuchung von hinreichend großen Systemen ermöglicht.

In folgendem wird ein Modell unabhängiger Elektronen der Masse  $m$  und der Ladung  $q = -e$  betrachtet, die sich in der  $x$ - $y$ -Ebene in einem homogenen, senkrechten Magnetfeld bewegen

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{r}). \quad (6.1)$$

$V(\mathbf{r})$  beschreibt das durch Impurities verursachte Zufallspotential. Die Grundzustands-Eigenfunktionen des ungestörten Hamilton-Operators

$$\varphi_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}\ell}} \frac{e^{-iky}}{\sqrt{L}} e^{-\frac{(x-k\ell^2)^2}{2\ell^2}}. \quad (6.2)$$

sind in der Landau-Eichung  $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$  um den Schwerpunkt bei  $x_k = k\ell^2$  zentriert.  $\ell = (\hbar c/eB)^{1/2}$  bezeichnet den Zyklotronradius. Nehmen wir periodische Randbedingungen in  $y$ -Richtung an, so ist die Wellenzahl  $k$  diskret und ein Vielfaches von  $\Delta k = 2\pi/L$ . Da die makroskopischen, physikalischen Eigenschaften nicht von mikroskopischen Details des Impurity-Potentials abhängen sollen, legt man im sogenannten *Random-Matrix-Modell*<sup>68</sup> nur minimale statistische Eigenschaften des Potentials fest.

Das Potential  $V(\mathbf{r})$  soll ein Elektron-Loch-symmetrisches Zufallspotential sein und räumliche Korrelationen mit einer typischen Potential-Korrelationslänge  $\lambda$  enthalten:

$$\begin{aligned} \overline{V(\mathbf{r})} &= 0 \\ \overline{V(\mathbf{r} + \mathbf{b})V(\mathbf{r})} &= \frac{u^2}{2\pi\lambda^2} e^{-b^2/2\lambda^2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Der Mittelungsstrich bezeichnet dabei das Ensemble-Mittel. Mit Hilfe der gaußschen White-Noise-Funktion  $V_0(\mathbf{r})$ , die den Bedingungen

$$\begin{aligned}\overline{V_0(\mathbf{r})} &= 0 \\ \overline{V_0(\mathbf{r} + \mathbf{b})V_0(\mathbf{r})} &= \delta(\mathbf{b})\end{aligned}\tag{6.4}$$

genügt, kann man

$$V(\mathbf{r}) = \frac{u}{\pi\lambda^2} \int d^2r' V_0(\mathbf{r}') e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{\lambda^2}}\tag{6.5}$$

auch als Superposition von Impurity-Potentials mit gaußscher Form und endlicher Reichweite  $\lambda$  ausdrücken, so daß (6.3) erfüllt ist.

Es ist zweckmäßig und in den folgenden numerischen Berechnungen äußerst effizient die Matricelemente  $V(k, k+d) = \langle k|V|k+d \rangle$  direkt zu erzeugen, anstatt etwa gaußförmige Impurities in der Ebene zu verteilen.

Mit den Abkürzungen  $L' = L/\sqrt{2\pi}\ell$ ,  $\lambda' = \lambda/\sqrt{2\pi}\ell$ ,  $x' = x/\sqrt{2\pi}\ell$ ,  $n_k = kL/2\pi$ ,  $a^2 = \pi/2L'^2$  und  $b = 1 + 2\pi\lambda'^2$  lautet das Potential-Matricelement

$$V(n_k, n_k + n_d) = \frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{b}} e^{-a^2 n_d^2 b} \int dx' w\left(x' + \frac{2n_k + n_d}{2L'}, n_d\right) e^{-2\pi x'^2/b},\tag{6.6}$$

wobei

$$w\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}\ell}, n_d\right) = \frac{1}{L} \int dy V_0(x, y) e^{-idy}\tag{6.7}$$

das Fourier-Integral des Potentials bezeichnet. Das Integral in (6.6) kann numerisch sehr gut durch eine diskrete Summe approximiert werden, indem man  $x'$  durch  $j/2L'$  substituiert<sup>131, 132</sup>. Damit erhält man

$$V(n_k, n_k + n_d) = \frac{u}{\sqrt{2b}L'} e^{-a^2 n_d^2 b} \sum_{j=-N}^N w\left(\frac{j + 2n_k + n_d}{2L'}, n_d\right) e^{-a^2 j^2/b}.\tag{6.8}$$

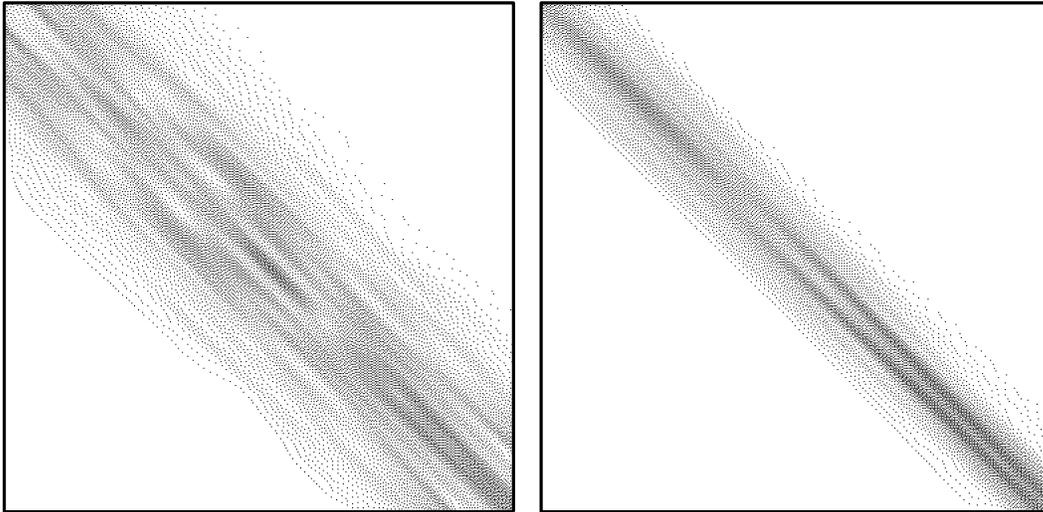
Die Summationsgrenze  $N$  wird so groß gewählt, daß das Resultat im Rahmen der numerischen Genauigkeit nicht mehr von dieser abhängt.

Real- und Imaginärteil von  $w \equiv w^R + iw^I$  erfüllen, wie man mit (6.4) bis (6.7) nachweist, die Relation

$$\overline{w^s(x, k)w^{s'}(x', k')} = \frac{1}{4\pi L'} \delta_{s,s'} \delta(x - x') (\delta_{k,k'} \pm \delta_{k,-k'}),\tag{6.9}$$

wobei  $s \equiv R, I$  und  $\pm$  für den Real- bzw. Imaginärteil stehen.

Im Random-Matrix-Modell werden nun gaußsche weiße Zufallszahlen  $\overline{w}^{I,R}(j, n_d)$  für den Real- und Imaginärteil von  $w(j, n_d)$  erzeugt. Damit werden die statistischen Randbedingungen (6.3) und (6.9) an die Matricelemente bereits erfüllt. Die Hermitizität der Random-Matrix muß dabei mittels  $\overline{w}^I(j, n_d) = -\overline{w}^I(j, -n_d)$  und  $\overline{w}^I(j, 0) = 0$  explizit berücksichtigt werden. Es ist zu beachten, daß die Zufallszahlen  $\overline{w}(j, 0)$  die einen diagonalen Beitrag liefern, gegenüber den außerdiagonalen Beiträgen entsprechend anders



**Abbildung 6.1:** Absolutbetrag der Random-Matrix-Elemente für ein kurzreichweitiges Potential ( $\lambda = 0$ , linkes Bild) und für ein langreichweitiges Potential ( $\lambda = 2\ell$ , rechtes Bild) mit  $L = 60$  und Matrixdimension  $M = 90$ . Die Punktdichte ist proportional zum Absolutbetrag.

normiert werden *müssen*<sup>\*</sup>, da der Imaginärteil  $\overline{w}^I(j, 0)$  stets verschwindet. In Abbildung 6.1 ist der Absolutbetrag der Random-Matrix-Elemente für zwei Potentiale unterschiedlicher Reichweite,  $\lambda = 0\ell$  und  $\lambda = 2\ell$ , dargestellt. Deutlich sind die Korrelationen unterschiedlicher Reichweite in Richtung der Diagonalen zu sehen. Mit wachsender Potentialkorrelationslänge wird die Random-Matrix mehr und mehr diagonal dominiert.

Das Random-Matrix-Modell beruht auf der Annahme, daß das Skalenverhalten und alle anderen physikalisch relevanten Eigenschaften des Quanten-Hall-Effekts nicht mehr wesentlich von Korrelationen höherer Ordnung des Potentials abhängen. Daß dies auch für die statische und dynamische Leitfähigkeit gilt, soll in den nächsten Abschnitten demonstriert werden.

Das Random-Matrix-Modell wurde bereits erfolgreich in der präzisen Berechnung<sup>69, 70</sup> des kritischen Exponenten der Korrelationslänge  $\nu$ , der verallgemeinerten fraktalen Dimensionen<sup>131</sup> und der Gleichgewichts-Stromverteilung<sup>132</sup> angewendet. Selbst, wenn für  $\lambda = 0$  das Potential  $\delta$ -korreliert ist, hat das effektive Potential eine endliche Korrelationslänge von der Größe der magnetischen Länge  $\ell$ . Für  $\lambda = 2\ell$  zeigt die Wellenfunktion bereits die Struktur des Hochfeld-Limes. Sie folgt den Äquipotentiallinien bereits über weite Bereiche<sup>132</sup> (siehe auch Bild 7.3).

---

<sup>\*</sup>Die diesbezügliche Fußnote in Referenz<sup>131</sup> behauptet das Gegenteil — man erhält so aber einen etwa um den Faktor 2 zu großen Wert für den kritischen Exponenten  $\nu$ , es ergeben sich aber offensichtlich die richtigen fraktalen Dimensionen.

## 6.2 Die Zustandsdichte

### 6.2.1 Analytische Modelle

Im Hochfeldmodell (HF) sind die Zustände auf den Äquipotentiallinien des Impurity-Potentials konzentriert. Deshalb ist die Zustandsdichte, bis auf einen Faktor  $1/2\pi\ell^2$ , der die Zahl der Zustände pro Fläche angibt, durch die Potentialverteilungsfunktion  $\langle\delta(E - V(\mathbf{r}))\rangle$  gegeben<sup>5</sup>. Konstruiert man das Impurity-Potential zum Beispiel<sup>97, 98</sup> durch eine Superposition von  $N$  zweidimensionalen Gauß-Funktionen der Reichweite  $d$ ,

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N V_i e^{-\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{d}\right)^2}, \quad (6.10)$$

wobei die Positionen  $\mathbf{r}_i$  der Streuer innerhalb der Fläche  $A$  und die Amplituden  $V_i$  im Intervall  $[-V, V]$  (gleichverteilt) ausgewürfelt werden, erhält man für die Zustandsdichte im 0-ten Landau-Band

$$\varrho_0^{\text{HF}}(E) = \frac{1}{2\pi\ell^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma_0/2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E-E_0}{\Gamma_0/2}\right)^2}. \quad (6.11)$$

Die dimensionslose Konzentration der Streuzentren  $c$  und die Breite  $\Gamma_0$  sind dabei durch

$$c = \frac{Nd^2}{A}, \quad \Gamma_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} V \sqrt{c} \quad (6.12)$$

gegeben.  $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$  bezeichnet die Energie des  $n$ -ten ungestörten Landau-Bandes.

Diese Methode zur Generierung von Zufallspotentialen wird in den numerischen Rechnungen mittels des streutheoretischen Verfahrens in Abschnitt 7 verwendet werden.

Die mit Hilfe der selbstkonsistenten Bornschen Näherung (SCBA) berechnete Zustandsdichte<sup>5</sup> weist für jedes Landau-Band die Form einer Halbellipse auf:

$$\varrho_n^{\text{SCBA}}(E) = \frac{1}{2\pi\ell^2} \frac{2}{\pi\Gamma_n} \sqrt{1 - \left(\frac{E - E_n}{\Gamma_n}\right)^2}. \quad (6.13)$$

Die Breite  $\Gamma_n$  ist durch die Matrixelemente des Potentials gegeben<sup>5</sup>. Bei diesem und den folgenden Resultaten für  $\varrho(E)$  wird die Bedingung eines starken Magnetfeldes, im Sinne von  $\hbar\omega_c \gg \Gamma_n$ , d. h. Entkopplung der Landau-Bänder, vorausgesetzt. Um das unphysikalische Verhalten an den Bandkanten zu vermeiden, muß man über die Bornsche Näherung für den einzelnen Streuer (Single Site Approximation) hinausgehen. Mit der Berücksichtigung von Streuung an Impurity-Clustern (Many Site Approximation) durch die näherungsweise Summation einer unendlichen Klasse von Diagrammen konnte T. Ando zeigen, daß bei hohen Landau-Indizes die semi-elliptische Form eine gute Approximation darstellt, während bei niedrigen Landau-Indizes eher eine gaußsche Form vorliegt.

Elegant werden die Effekte von Mehrfachstreuungen in der Kumulantenentwicklung der Green-Funktion (LOCA) mit Hilfe der Feynmanschen Pfadintegraldarstellung durch

R. R. Gerhardt<sup>55</sup> mitgenommen. Er erhält damit eine gaußförmige Zustandsdichte für das  $n$ -te Landau-Band

$$\varrho_n^{\text{LOCA}}(E) = \frac{1}{2\pi\ell^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma_n/2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E-E_n}{\Gamma_n/2}\right)^2} \quad (6.14)$$

F. J. Wegner<sup>166</sup> konnte für den Fall eines Impurity-Potentiales mit gaußschem weißen Rauschen sogar die exakte Lösung für das niedrigste Landau-Niveau angeben:

$$\varrho_0^{\text{EXACT}}(E) = \frac{1}{2\pi\ell^2} \frac{2}{\pi^{3/2}\Gamma_0} \frac{e^{\nu^2}}{1 + \operatorname{erfi}^2\nu}, \quad \Gamma_0 = \frac{u}{\sqrt{2\pi}\ell}, \quad \nu = \frac{E - E_0}{\Gamma_0} \quad (6.15)$$

Dies entspricht also dem Fall  $\lambda = 0$  in Gleichung (6.3).  $\varrho_0^{\text{EXACT}}(E)$  fällt in den Flanken gaußförmig ab, ist aber in der Mitte flacher und breiter.

Brézin et al.<sup>28</sup> entwickelten schließlich mit Hilfe eines supersymmetrischen Formalismus eine systematische Verallgemeinerung für verschiedene andere Verteilungen.

## 6.2.2 Numerische Rechnungen

In Abbildung 6.2 ist die Zustandsdichte  $\varrho(E)$  für ein kurzreichweitiges Potential mit  $\lambda = 0$ , für  $\lambda = 1\ell$ , sowie für ein langreichweitiges Potential mit  $\lambda = 2\ell$  gezeigt. Die Berechnung wurde mit den Iterationsgleichungen (3.6) im Rahmen des Random-Matrix-Modells durchgeführt. Für die Dimension der Random-Matrix wurde  $M = 1.5 \times L/\ell$  gewählt. Aus Gleichung (6.8) erhält man eine Abschätzung für den Cutoff-Fehler

$$|V(n_k, n_k + M)|^2 \sim e^{-2(\pi M\ell/L)^2 b} \sim 5 \times 10^{-20} e^{(\ell^2 + \lambda^2)/\ell^2}. \quad (6.16)$$

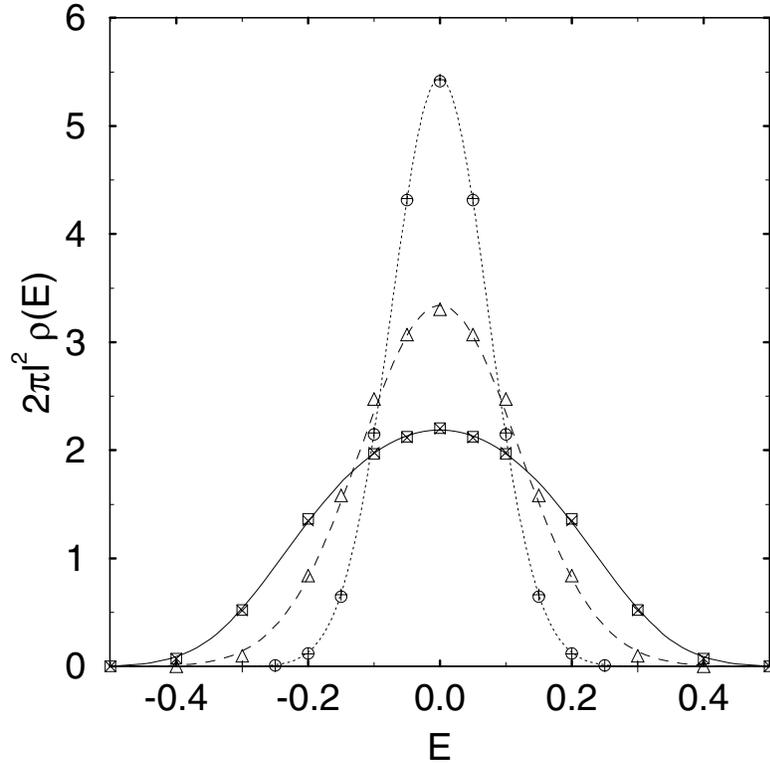
Dieser wird damit im Vergleich zur Rechengenauigkeit, d. h. auch im asymptotischen Wert von  $\varrho(E)$  vernachlässigbar klein.\* Diese Wahl für die Größe der Random-Matrix wurde auch in den folgenden Rechnungen zur dynamischen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(\omega)$  beibehalten.

Nach  $N = 2 \times 10^5$  Iterationen mit einem Einschaltparameter von  $\varepsilon = 10^{-4}$  waren die Datenpunkte innerhalb eines relativen Fehlers von bereits weniger als  $5 \times 10^{-3}$  konvergiert.

Bei dem kurzreichweitigen Potential ( $\lambda = 0$ ) wird  $\varrho(E)$  perfekt durch F. J. Wegners Funktion (6.15) wiedergegeben (Abbildung 6.2, durchgezogene Linie). Bei dem langreichweitigen Potential,  $\lambda = 2\ell$ , ist die Zustandsdichte in sehr guter Näherung gaußförmig (gepunktete Linie). Dies kann als ein Hinweis gewertet werden, daß man sich dem Regime nähert, in dem der Hochfeld-Limes (6.11) bereits eine gute Approximation darstellt. Wellenfunktionen, die mit  $d \approx 2\ell$  berechnet wurden (siehe z. B.

---

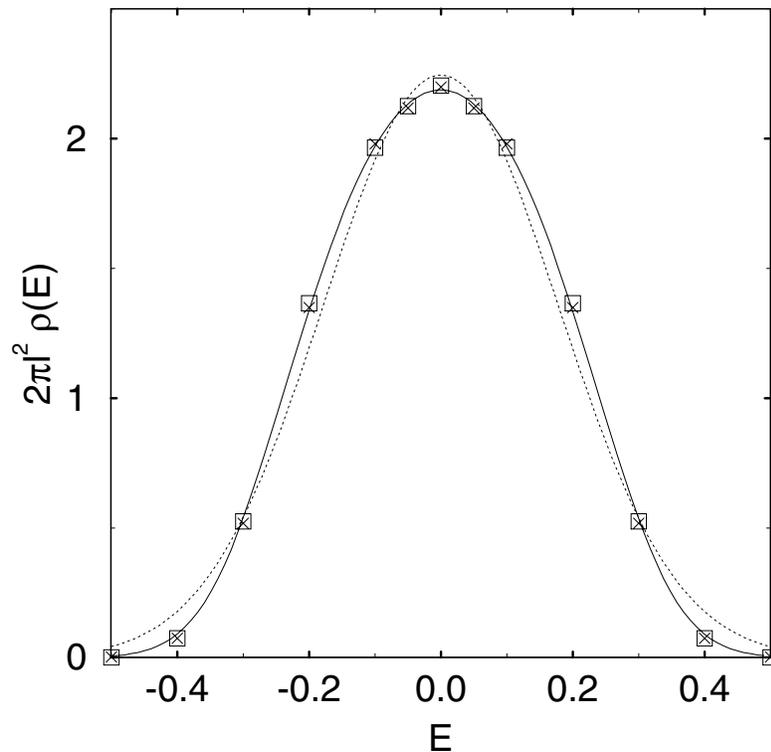
\*Zum Vergleich: In den Rechnungen zur Lokalisierungslänge<sup>69</sup> wurde mit  $M/L' = M\sqrt{2\pi}\ell/L = 2$  ein Cutoff-Fehler von  $4 \times 10^{-6}$  in jedem Iterationsschritt zugelassen ( $\lambda = 0$ ).



**Abbildung 6.2:** Zustandsdichte  $\rho(E)$  für kurzreichweitige Potentiale mit  $\lambda = 0$  ( $\times$  :  $L = 10$ ,  $\square$  :  $L = 20$ ) und für langreichweitige Potentiale mit  $\lambda = 1\ell$  ( $\Delta$  :  $L = 20$ ), sowie  $\lambda = 2\ell$  ( $+$  :  $L = 10$ ,  $\circ$  :  $L = 20$ ), mit  $\varepsilon = 10^{-4}$  nach  $2 \times 10^5$  Iterationen. Im Falle kurzer Reichweite wird  $\rho(E)$  perfekt durch F. J. Wegners Funktion wiedergegeben (durchgezogen), Im Falle langer Reichweite erhält man eine Gauß-Funktion (gepunktet). Der Fall  $\lambda = 1\ell$  liegt dazwischen (*best fit* Gauß gestrichelt). Der relative Fehler ist in allen Fällen kleiner als  $5 \times 10^{-3}$ .

Abbildung 7.3), sind bereits stark auf die Äquipotentiallinien konzentriert. Eine Potentialkorrelationslänge von  $\lambda = 2\ell$  ist, wie in Abschnitt 6.4.1 über Long Time Tails gezeigt wird, ausreichend, um die spezifischen Eigenschaften langreichweitiger Potentiale auch in den Response-Größen zu sehen. Der Fall  $\lambda = 1\ell$  liegt, wie die angepaßte Gauß-Funktion (gestrichelt) verdeutlicht, gerade zwischen Gauß' und Wegners Funktion.

Die große Präzision der Iterationsmethode ermöglicht es, wie Abbildung 6.3 klar zeigt, zwischen einer Gauß-Funktion und der nur geringfügig verschiedenen Funktion von Wegner zu unterscheiden. Das dargestellte Resultat für  $\lambda = 0$  wird nahezu perfekt durch die exakte Lösung (6.15) wiedergegeben (durchgezogene Linie), während die mit Hilfe eines Least-Squares-Fit angepaßte Gauß-Funktion (gepunktete Linie) an der Spitze und an den Flanken signifikant von den Datenpunkten abweicht. Diese Genauigkeit ist mit Hilfe von Diagonalisierungsmethoden<sup>120</sup> nur durch extensive Mittelung über große Systeme zu erreichen.



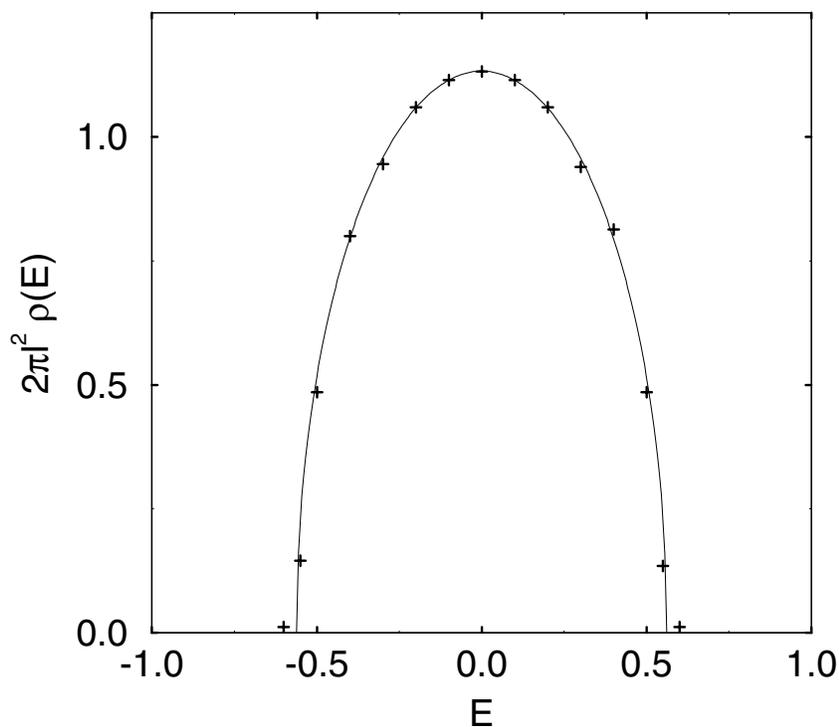
**Abbildung 6.3:** Die Zustandsdichte  $\rho(E)$  für das kurzreichweitige Potential ( $\lambda = 0$ ,  $\times$  :  $L = 10$ ,  $\square$  :  $L = 20$ ) wird fast perfekt durch F. J. Wegners Funktion (durchgezogen) wiedergegeben. Zum Unterschied ist eine optimal angepasste Gauß-Funktion (gepunktet) eingezeichnet.

Die wesentliche Bedeutung der Korrelationen „entlang“ der Diagonalen in den Random-Matrix-Elementen (Abbildung 6.1) kann dadurch drastisch verdeutlicht werden, daß man diese einmal versuchsweise abschaltet, sonst aber alles beibehält (d. h. Zufallszahlen so verteilt, daß das gaußsche Profil senkrecht zur Diagonalen der Random-Matrix erhalten bleibt). Das Ergebnis ist die in Abbildung 6.4 dargestellte Zustandsdichte, die sehr gut durch eine Halbellipse approximiert werden kann und damit im wesentlichen der SCBA-Zustandsdichte (6.13) entspricht.

Die Zustandsdichte  $\rho(E)$  ist bei einem durch Unordnung getriebenen Metall-Isolator-Übergang (*Anderson transition*) — im Gegensatz zur Situation bei einem korrelationsinduzierten Übergang (*Mott transition*) — eine *unkritische* Größe.

Die erwartete Skaleninvarianz der Zustandsdichte wird klar aus dem Vergleich von zwei Systemen verschiedener Größe ersichtlich (Abbildung 6.2). Im kurzreichweitigen Potential mit  $\lambda = 0$  ( $\times$  :  $L = 10$ ,  $\square$  :  $L = 20$ ) und im langreichweitigen Potential mit  $\lambda = 2\ell$  ( $+$  :  $L = 10$ ,  $\circ$  :  $L = 20$ ) fallen die Datenpunkte für verschiedene Systemgrößen innerhalb eines relativen Fehlers von  $5 \times 10^{-3}$  jeweils auf eine Kurve.

Die Besonderheit des LD-Phasenüberganges liegt nun darin, daß er nicht an einer Ein-Teilchen-Green-Funktion (also etwa der Zustandsdichte) sichtbar ist, sondern sich



**Abbildung 6.4:** Die Zustandsdichte  $\varrho(E)$  für ein „Random-Matrix-Modell“ in dem die Korrelationen abgeschaltet wurden (+:  $L = 20$ ,  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ ).  $\varrho(E)$  wird gut durch eine Halbellipse (durchgezogene Linie) approximiert.

erst im Skalenverhalten einer Zwei-Teilchen-Green-Funktion manifestiert. Als solche werden im nächsten Abschnitt deshalb die statische und die dynamische Leitfähigkeit untersucht.

Energien und Frequenzen werden im folgenden immer auf die jeweilige Breite  $\sigma$  der Zustandsdichte, d. h. das 2. Moment der Verteilung von  $\varrho(E)$ , normiert. ( $\sigma = 0.1655$  für  $\lambda = 0\ell$ ,  $\sigma = 0.1195$  für  $\lambda = 1\ell$ ,  $\sigma = 0.7325$  für  $\lambda = 2\ell$ .) Der Wert für den Infinitesimalparameter  $\varepsilon$  wird jeweils unnormiert angegeben.

## 6.3 Die Leitfähigkeit bei kurzreichweitigen Potentialen

Numerische Untersuchungen zum Skalenverhalten (mittels Finite-Size-Scaling) beschränken sich bis heute in erster Linie auf die Skalenvariable  $\Lambda_L = \xi_L/L$ , da die Korrelationslänge sehr effizient und genau mit iterativen Verfahren berechnet werden kann (Transfermatrix-Methode, Green-Funktions-Methode).

Skalenuntersuchungen an den „nächst-komplizierteren“ Größen, wie der inversen Besetzungszahl<sup>148-150</sup> und der Thouless-Zahl<sup>10, 80</sup> oder multifraktale Analysen der Wellenfunktionen<sup>131, 136, 151, 152</sup> sind durch die inhärente Diagonalisierung in den erreichbaren Systemgrößen stark beschränkt.

Darüber hinaus ist es aber auch wünschenswert das kritische Verhalten nicht nur an „Hilfsgrößen“, sondern an den tatsächlichen experimentellen Observablen, also etwa der Leitfähigkeit, durchzuführen. Es wurden zwar Verallgemeinerungen der Green-Funktions-Iterationsmethode für die statische Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  und die Hall-Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$  angegeben, aber offensichtlich aufgrund des Aufwandes nie in eine tatsächliche Berechnung investiert. Die iterative Berechnung der dynamischen Leitfähigkeit  $\sigma(\omega)$  erfordert gegenüber der statischen noch einmal etwa den doppelten Aufwand.

Dieser rechtfertigt sich jedoch in einer detaillierteren Einsicht in das kritische Skalenverhalten am Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang als man sie aus der Lokalisierungslänge alleine gewinnen könnte:

Zum einen können dadurch bekannte Eigenschaften bestätigt und in einheitlicher Sicht beschrieben werden, wie die Hypothese eines universellen Leitfähigkeitsfixpunktes  $\sigma_{xx}^c$  beim kritischen Füllfaktor (Energie  $E^c$ ), die Divergenz der Lokalisierungslänge an einem einzigen kritischen Punkt oder das Auftreten des anomalen Diffusionsverhaltens bei kleinen Frequenzen.

Zum anderen treten neue Eigenschaften zu Tage: Im Skalenverhalten der statischen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(E, L)$  spielt die fraktale Dimension  $D_2$  die Rolle eines irrelevanten Skalenindex. Man gewinnt Verständnis über den Mechanismus, der zur Unterdrückung der mesoskopischen Leitwertfluktuationen führt und so die experimentelle Beobachtung des Skalenverhaltens in Tieftemperaturexperimenten ermöglicht.

### 6.3.1 Das Skalenverhalten der statischen Leitfähigkeit

#### 6.3.1.1 Der kritische Exponent $\nu$

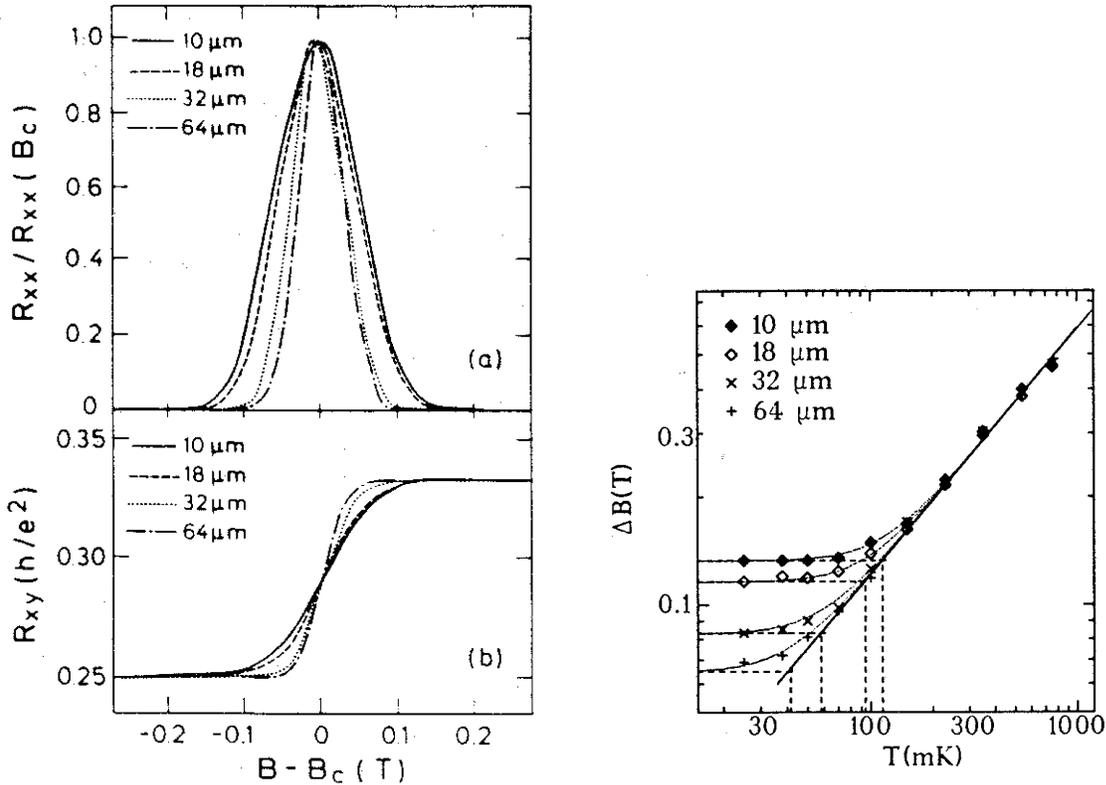
Der kritische Exponent der Korrelationslänge  $\nu$  konnte von S. Koch et al.<sup>89-93</sup> in einer experimentellen Finite-Size-Scaling-Analyse an  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$ -Heterostrukturen bei tiefen Temperaturen,  $T \approx 25\text{mK}$ , direkt gemessen werden. Dabei wurde das Skalenverhalten der Breite des longitudinalen Widerstands-Peaks  $R_{xx}(B)$  von gleich proportionierten Hall-Bars verschiedener Breite  $L$  bestimmt (Abbildung 6.5, links). Sobald mit

sinkender Temperatur die inelastische Streulänge  $L_{\text{in}}$  die Probengröße  $L$  überschritten hat, wird der Cutoff in der Lokalisierungslänge nicht mehr durch  $L_{\text{in}}$  sondern durch die Probengröße  $L$  bestimmt. Die Peak-Breite  $\Delta B(T)$  erreicht dann einen durch  $L$  bestimmten Sättigungswert (Abbildung 6.5, rechts).

Der experimentelle Wert für den Exponenten, den S. Koch et al. aus einer Anpassung an das Potenzgesetz

$$\xi \propto |B - B_c|^{-\nu} \quad (6.17)$$

erhalten hat, ist  $\nu = 2.3 \pm 0.1$  für die niedrigsten drei Landau-Niveaus. Er stimmt bemerkenswert gut mit den vorhergesagten theoretischen Ergebnissen überein.



**Abbildung 6.5:** Experimentelle Messung<sup>89</sup> von  $\nu$  mittels Finite-Size-Scaling an Hall-Bars der Breite  $L = 10, 18, 32$  und  $64 \mu\text{m}$ . Links der normierte longitudinale Widerstand  $R_{xx}$  und der Hall-Widerstand  $R_{xy}$  bei 25K. Rechts die Sättigung der Halbwertsbreite  $\Delta B(T)$  der Peaks, wenn mit sinkender Temperatur die Phasenkohärenzbedingung  $L_{\text{in}} > L$  erfüllt wird.

In einer älteren Arbeit, die auf der Verwendung der selbstkonsistenten Bornschen Näherung basiert, schlug Y. Ono<sup>129, 130</sup> vor, daß die Lokalisierungslänge exponentiell wie  $\xi \propto \exp(E_0^2/(E - E^c)^2)$  in der Mitte des niedrigsten Landau-Bandes divergiert. Numerische Simulationen von T. Ando und H. Aoki<sup>9, 14</sup> hingegen ergaben bereits kritisches Skalenverhalten mit einem Potenzgesetz bei einer einzigen Energie in der Mitte des Landau-Bandes. Die noch groben Abschätzungen ergaben  $\nu = 2$  und  $\nu = 4$  für das

nullte bzw. erste Landau-Band und Abweichungen von einparametrischen Skalenverhalten.

B. Huckestein und B. Kramer<sup>69</sup> erhielten mit Hilfe der Green-Funktions-Methode für das Skalenverhalten der Lokalisierungslänge  $\nu = 2.34 \pm 0.04$ , bzw.<sup>72, 73</sup>  $\nu = 2.35 \pm 0.03$  für das niedrigste Landau-Niveau. Eine vergleichbare Berechnung von B. Mieck<sup>119</sup> ergab  $\nu = 2.30 \pm 0.08$ .

Diese Resultate stimmen bemerkenswert gut mit dem analytischen Wert  $\nu = \frac{7}{3}$  von G. V. Mil'nikov and I. M. Sokolov<sup>122</sup> überein, der sich aus Perkolation unter der Berücksichtigung von Tunneln in WKB-Näherung ergibt. Ebenso liefern Simulationen aus Quanten-Perkulations-Modellen von J. T. Chalker und P. D. Coddington<sup>37</sup>,  $\nu = 2.5 \pm 0.5$ , bzw. D. H. Lee, Z. Wang und S. Kivelson<sup>106</sup>,  $\nu = 2.4 \pm 0.2$  einen übereinstimmenden Exponenten.

Die numerischen Fits basierten jedoch auf der bis dato ungeprüften Annahme, daß die Lokalisierungslänge  $\xi$  bei einem einzigen Punkt im Energiespektrum divergiert. Y. Huo and R. N. Bhatt<sup>77</sup> konnten aber ein Szenarium mit zwei Mobilitätskanten und einem endlichen Bereich von ausgedehnten Zuständen ausschließen. Sie untersuchten dazu das Skalenverhalten des ersten Chern-Index der Eigenzustände<sup>16</sup>, der ein Maß für die Ausdehnung der Wellenfunktion darstellt, und erhielten ebenfalls  $\nu = 2.4 \pm 0.1$ .

Die für höhere Landau-Bänder angegebenen numerischen Werte für  $\nu$  sind zur Zeit noch unzuverlässig. Diese zeigen für das erste Landau-Band kein einparametrisches Skalenverhalten, wenn die Potentialkorrelationslänge kleiner als die magnetische Länge ist.<sup>75, 108, 119</sup> Das heißt jedoch nicht, daß kein universelles Skalenverhalten in höheren Landau-Bändern vorliegen könnte. Die betrachteten Systeme sind möglicherweise zu klein, um das asymptotische einparametrische Skalenregime zu erreichen. Eine neuere Analyse<sup>75</sup> zeigt, daß es eine weitere Längenskala  $\xi^{\text{irr}}$  gibt, bis zu der einparametrisches Skalenverhalten nicht existiert, wobei  $\xi^{\text{irr}}$  eine Funktion der Potential-Korrelationslänge (und der Landau-Quantenzahl) ist. Das führt zu einer Verschiebung des Fixpunktes  $\Lambda^c = \xi_L/L (L \rightarrow \infty)$  gemäß

$$\Lambda = \Lambda^c + a (L^{1/\nu} \Delta E)^2 + b L^{y_{\text{irr}}} \xi^{\text{irr}} + \dots \quad (6.18)$$

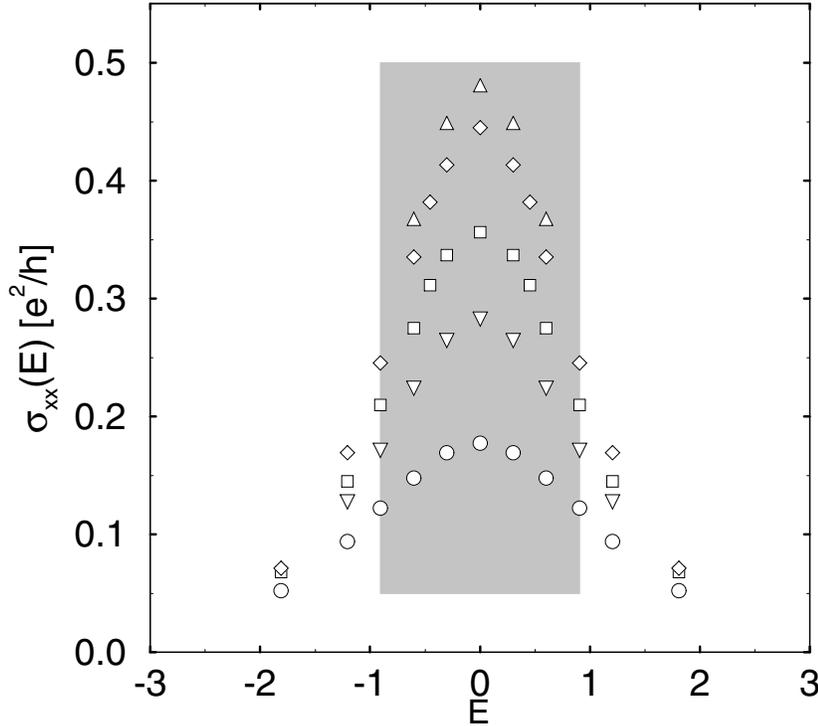
$\xi^{\text{irr}}$  wächst im ersten Landau-Band mit kleiner werdender Potential-Korrelationslänge bereits so stark an, daß die Systemgrößen, in denen das einparametrische Regime erwartet wird, beträchtlich größer als die heute erreichbaren sind. Diese Beobachtung unterstützt die Vermutung, daß sowohl  $\nu$  als auch  $\Lambda^c$  universell sind.

Im folgenden wird das Skalenverhalten der diagonalen Leitfähigkeit *ohne* weitere Annahmen und durch eine *direkte* Berechnung mit Hilfe des entwickelten Iterationsverfahrens nachgewiesen und unmittelbar mit den experimentellen Ergebnissen verglichen.

Es wurden Systeme mit kurzreichweitigen Impurity-Potentialen,  $\lambda = 0$ , der Größe  $L = 10$  bis  $L = 50$  und einem adiabatischen Einschaltparameter im Bereich von  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$  bis  $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$  untersucht. Der thermodynamische Limes wird durch die Erhöhung der Systemgröße  $L \rightarrow \infty$  und zuletzt die Verringerung von  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  erreicht, um alle Beträge aus dem Spektrum von  $\mathbf{H}$  mitzunehmen. Deshalb kann bei einem kleinen, aber

festen Wert für  $\varepsilon$  das Skalenverhalten von  $\sigma_{xx}$  in Abhängigkeit von der Systembreite  $L$  untersucht werden.

Die Fermi-Energie wird dabei im Bereich von  $-2 < E < 2$  variiert. Die Energieskala ist auf die Zustandsdichte (Abbildung 6.2, durchgezogene Linie) geeicht. Es wurde jeweils über zwei Durchläufe mit mehr als  $1.5 \times 10^5$  Iterationsschritten bei den beiden kleinsten Systemen und  $10^5$  Iterationsschritten bei den übrigen Systemen gemittelt.\*

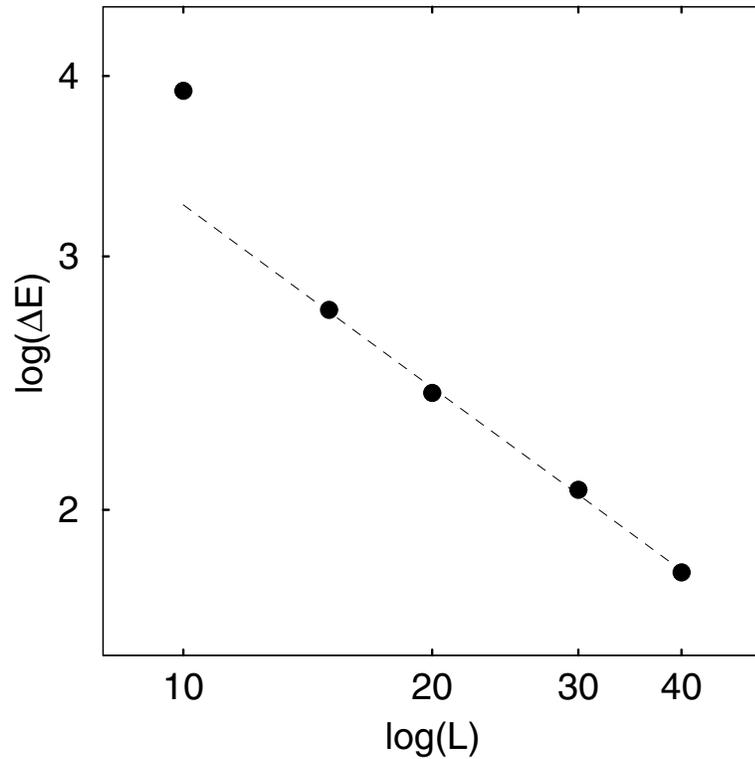


**Abbildung 6.6:** Die statische Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(E)$  in Einheiten von  $e^2/h$  als Funktion der Fermi-Energie  $E$ . Die Systembreiten sind  $L = 10$  ( $\circ$ ),  $L = 15$  ( $\nabla$ ),  $L = 20$  ( $\square$ ),  $L = 30$  ( $\diamond$ ),  $L = 40$  ( $\triangle$ ). Das Impurity-Potential ist kurzreichweitig ( $\lambda = 0$ ). In allen Fällen ist  $\varepsilon = 10^{-3}$  und  $N > 10^5$ . Die Datenpunkte im schattierten Bereich werden in der Berechnung von  $\nu$  benutzt.

In Abbildung 6.6 ist die statische Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(E)$  als Funktion des Fermi-Niveaus  $E$  in Einheiten von  $e^2/h$  aufgetragen. Die statistischen Fehler sind weniger als halb so groß wie die zur Markierung der Datenpunkte verwendeten Symbole. Man erkennt deutlich, daß der Peak mit wachsender Systemgröße schmaler, aber auch höher wird. Die Breite des Peaks konnte am genauesten durch das Anpassen einer umgekehrten Parabel  $\sigma(0) - (E/\Delta E)^2$  innerhalb eines kleinen Energiebereiches  $-1 < E < 1$  um den Scheitel ermittelt werden (schattierter Bereich).

In Abbildung 6.7 ist der Breitenparameter  $\Delta E$  gegen die Systembreite  $L$  aufgetragen.

\*Mit  $\ell \approx 26 \text{ nm} / \sqrt{B[T]}$  und  $B \approx 6 \text{ T}$  (vgl. Abb. 1.1) erhält man  $\ell \approx 100 \text{ \AA}$ , d. h. die untersuchten Systeme entsprechen Proben mit der Ausdehnung  $L_y \approx 0.5 \mu\text{m}$  und  $L_x \approx 10 \text{ mm}$ .



**Abbildung 6.7:** Doppelt logarithmische Auftragung der Breite  $\Delta E$  des  $\sigma_{xx}$  Peaks als Funktion der Systembreite  $L$  für Potentiale mit kurzer Reichweite ( $\lambda = 0$ ). Die Gerade mit dem optimierten Exponenten  $\nu = 2.37 \pm 0.05$  ist gestrichelt eingezeichnet.

Die Daten sind bei Systembreiten größer als  $L = 15$  verträglich mit ein-parametrigem Skalenverhalten. Da die Peak-Breite eine statistisch sehr gutartige Größe darstellt, erhält man eine sehr genaue Abschätzung des Exponenten  $\nu = 2.37 \pm 0.05$  mittels einer einfachen linearen Regression.

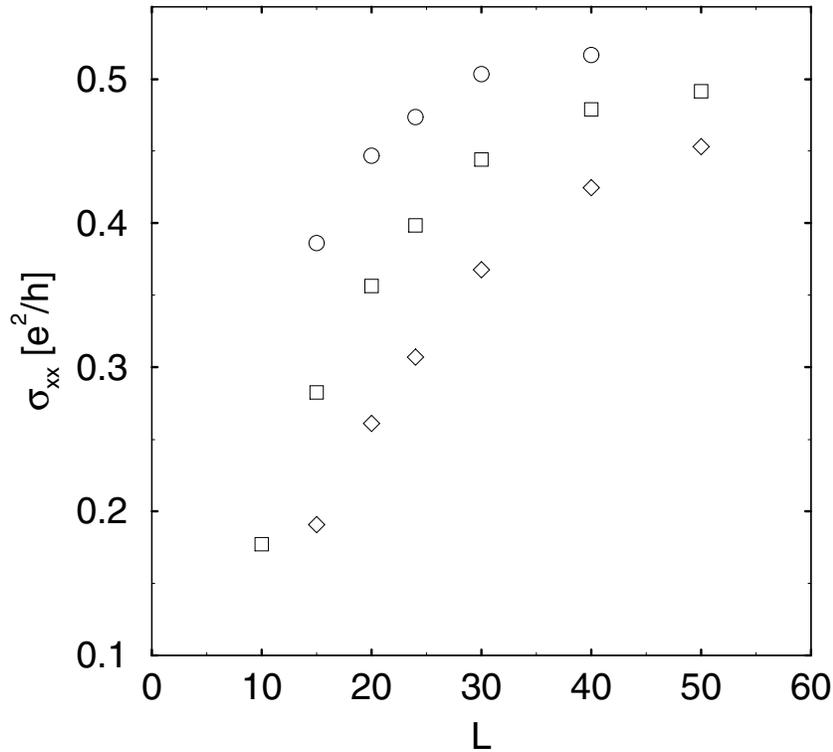
In Abbildung 6.8 ist der Peak-Wert von  $\sigma_{xx}(0)$  bei halbem Füllfaktor  $E = E^c$  für drei Werte von  $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ , und  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$  gezeigt. Die Systembreite variiert im Bereich  $L = 10$  bis 50.

Bei kleiner werdendem  $\varepsilon$  nähert sich die Leitfähigkeit erst bei immer größeren Systemen dem Fixpunktwert  $\sigma_{xx}^c = e^2/2h$ . Mit  $\varepsilon = 10^{-3}$  und  $L$  bis 40 ist man bereits relativ nahe am kritischen Wert, so daß man gutes Skalenverhalten in der Breite  $\Delta E$  erwarten kann.

### 6.3.1.2 Der kritische Exponent $\eta'$

Wie man in Abbildung 6.6 sieht, nimmt die Peak-Höhe mit wachsender Systemgröße zu und nähert sich dem vermuteten universellen Fixpunkt  $\sigma_{xx}^c = e^2/2h$ .

Es soll nun ein Zusammenhang zwischen der verallgemeinerten fraktalen Dimension  $D_2$  der Wellenfunktion und der Skaleneigenschaft des Maximums des  $\sigma_{xx}$ -Peaks hergestellt



**Abbildung 6.8:** Das Maximum der statischen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  für  $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$ , (o),  $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ , (□),  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ , (◇) bei Systemen der Breite  $L = 10$  bis 50.

werden.

Betrachtet man die Gleichung (5.34), zeigt sich, daß die inverse Besetzungszahl  $P^{(2)}(E)$  proportional zur spektralen Komponente  $p(E)$  der Rückkehrwahrscheinlichkeit zu  $\mathbf{r}_0$  ist. F. Wegner's kritischer Exponent für

$$P^{(2)}(E) \propto (E - E^c)^{\pi_2} \quad (6.19)$$

hängt mit der verallgemeinerten fraktalen Dimension gemäß (5.29) über

$$\pi_2 = \nu D_2 \quad (6.20)$$

zusammen. Damit verschwindet die Rückkehrwahrscheinlichkeit bei der kritischen Energie wie

$$p(\xi) \propto \xi^{-D_2}. \quad (6.21)$$

Im kritischen Regime werden Längen- und Zeitskalen durch den dynamischen kritischen Exponenten verknüpft,  $\xi^z = \tau$ . Die Rückkehrwahrscheinlichkeit  $p(\tau)$  zur Zeit  $\tau$  skaliert also mit

$$p(\tau) = \tau^{-D_2/z} \quad (6.22)$$

Diese Relation folgt auch direkt aus (6.34) und wurde von B. Huckestein und L. Schweitzer<sup>74</sup> erst kürzlich numerisch überprüft: Die Zeitentwicklung von Wellenpa-

keten, die aus Zuständen in der Nähe des LD-Übergangs aufgebaut wurden, ergibt mit  $z = 2$  einen Wert von  $D_2 = 1.63 \pm 0.03$ .

Die Transportkoeffizienten des *linear response* können mit der streutheoretischen Formulierung verknüpft werden<sup>49</sup>. Das ist nicht überraschend, da das asymptotische Verhalten der Green-Funktionen mit den Amplituden der Streuzustände zusammenhängen. Dennoch konnte dieser Zusammenhang für beliebige Meßgeometrie, beliebige Impurity-Konfiguration und unter Berücksichtigung eines äußeren Magnetfeldes erst 1989 explizit gezeigt werden<sup>21</sup>. Der Reflektionskoeffizient  $R$  ist proportional zum Betragsquadrat der Green-Funktion, wobei beide Argumente  $\mathbf{r}_0 \rightarrow \infty$  im einfallenden Kanal zu nehmen sind. Deswegen wird das Skalenverhalten des mittleren Reflexionskoeffizienten  $R$  durch das Potenzverhalten (6.21) der Rückkehrwahrscheinlichkeit

$$R \propto \xi^{-D_2} \quad (6.23)$$

bestimmt. Drückt man nun die Leitfähigkeit mittels der Landauer-Büttiker-Formel für eine 2-Punkt-Messung mit idealen Zuleitungen aus, erhält man

$$\sigma = \frac{e^2}{h} T, \quad R = 1 - T, \quad (6.24)$$

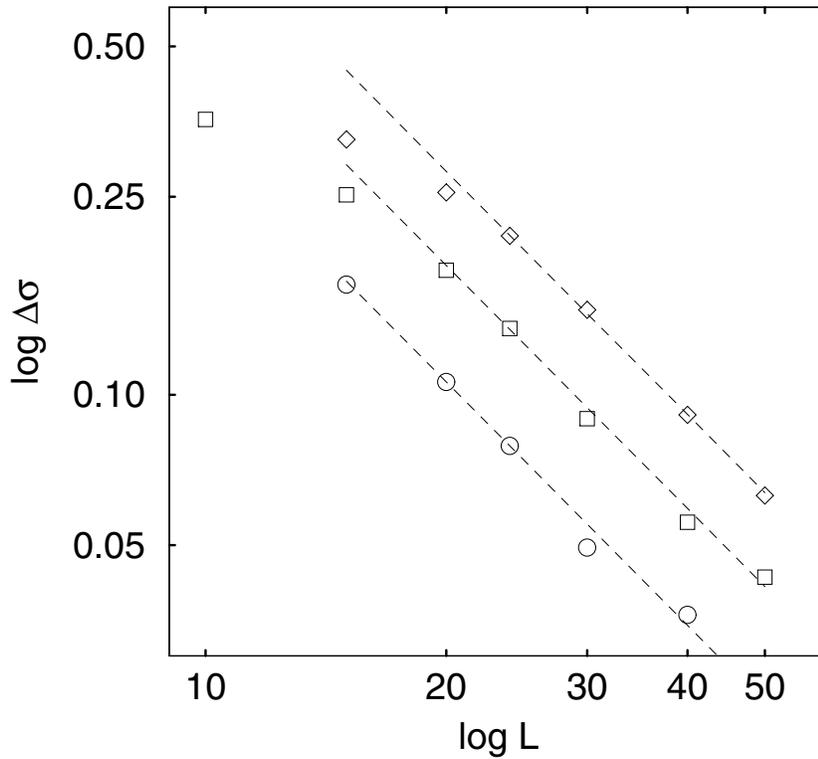
wobei  $T = \text{Tr}\{t^+t\}$  und  $t_{mn}$  die Matrix der Transmissionskoeffizienten ist. Daraus schließen wir, daß die Abweichung der Leitfähigkeit von ihrem Fixpunktwert aus einer *Finite-Size-Scaling-Analyse* gewonnen werden kann:

$$\Delta\sigma_L = (\sigma_\infty - \sigma_L) \propto L^{-D_2}. \quad (6.25)$$

Abbildung 6.9 zeigt die doppelt logarithmische Auftragung der Abweichung  $\Delta\sigma_L$  vom kritischen Wert der Leitfähigkeit für verschiedene Systemgrößen und Werte von  $\varepsilon$ . Wegen des endlichen Wertes von  $\varepsilon$  ist der kritische Wert *systematisch* um einen kleinen, aber nicht zu vernachlässigenden Betrag verschoben. Deswegen wurde  $\eta'$  simultan mit  $\sigma_{xx}(E^c, \varepsilon)$  in einem Least-Squares-Fit angepaßt. Es wurden dazu jeweils die fünf größten Systeme für  $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$  und  $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ , bzw. die vier größten Systeme für  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$  verwendet. Mit  $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$  erhält man den Fixpunktwert  $\sigma_{xx}^c = 0.553$ , bei  $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$  ist  $\sigma_{xx}^c = 0.535$ , und bei  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$  ist  $\sigma_{xx}^c = 0.516$ , wobei man den gemeinsamen Exponenten  $\eta' = 1.63 \pm 0.03$  erhält. Der mit (5.37) resultierende Wert für  $\eta = 0.37 \pm 0.03$  ist konsistent mit J. T. Chalkers früherem Ergebnis.

### 6.3.1.3 Der Leitfähigkeitsfixpunkt

Es ist deutlich zu sehen, daß man sich dem universellen Wert der Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}^c = e^2/2h$  mit kleiner werdendem  $\varepsilon$  nähert. Die Abschätzung für den kleinsten Wert für  $\varepsilon$  ist nur noch 4 % vom Fixpunkt entfernt. Man beobachtet, daß mit kleiner werdendem  $\varepsilon$  der Bereich in dem Scaling zu sehen ist, zu immer größeren Systemen verschoben wird.



**Abbildung 6.9:** Das Skalenverhalten des Abstandes  $\Delta\sigma_{xx}^L(E^c)$  vom universellen Wert  $\sigma_{xx}^c$  der Leitfähigkeit bei kurzreichweitigen Potentialen ( $\lambda = 0$ ) für Systeme der Größe  $L = 10$  bis  $50$ . Mit  $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$ , (○) ist  $\sigma_{xx}^c = 0.553$ , mit  $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$ , (□) ist  $\sigma_{xx}^c = 0.535$ , und mit  $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ , (◇) erhält man  $\sigma_{xx}^c = 0.516$ . Der gemeinsame Exponent ist  $D_2 = 1.63 \pm 0.03$  (gestrichelt).

Die Resultate der vorangegangenen beiden Abschnitte können nun in einer Skalenrelation zusammengefaßt werden. Für die statische Leitfähigkeit in der Nähe des

Leitfähigkeitsfixpunktes

$$\sigma_{xx}^c = (0.5 \pm 0.02)e^2/h$$

gilt die

Skalenrelation

$$\sigma_{xx}(E, L) = \sigma_{xx}^c - a_1(L^{\frac{1}{\nu}}(E - E^c))^2 - a_2L^{-\eta'} + \dots \quad (6.26)$$

mit den

kritischen Exponenten

$$\eta' = D_2 = 1.63 \pm 0.03 \quad \text{und} \quad \nu = 2.37 \pm 0.05$$

### 6.3.1.4 Das Fehlen mesoskopischer Leitwertfluktuationen

Ein wichtiger Punkt, der an dieser Stelle noch diskutiert werden muß, betrifft das von A. M. M. Pruisken<sup>80, 141</sup> aufgeworfene Problem der fehlenden mesoskopischen Leitwertfluktuationen (MCF) in den zitierten Tieftemperatur-Experimenten von S. Koch:

Nur wenn die Voraussetzung erfüllt ist, daß die inelastische Streulänge  $L_{\text{in}}$  größer als die Probenbreite  $L$  ist, wird der Cutoff in der Lokalisierungsgröße  $\xi$  durch  $L$  bestimmt. Nur dann ist es möglich mittels Finite-Size-Scaling den kritischen Exponenten  $\nu$  zu bestimmen. Andererseits sollten gerade unter dieser Bedingung starke Leitwertfluktuationen aufgrund der Phasenkohärenz über die gesamte Probe auftreten. Da diese jedoch nicht beobachtet wurden, ist es zweifelhaft ob die Bedingung  $L_{\text{in}} > L$  erfüllt und damit die Bestimmung eines Exponenten überhaupt möglich war.

Die dargestellten Resultate sprechen deutlich dafür, daß trotz, oder genauer wegen der Abwesenheit der MCFs, das Skalenverhalten in der Kubo-Leitfähigkeit präzise nachgewiesen werden kann:

Der Mechanismus der Unterdrückung der MCFs ist in dem endlichen Wert des adiabatischen Einschaltparameters  $\varepsilon$  zu suchen. Die dadurch eingeführte Niveauverbreiterung führt zu einer Mittelung über die Phase in einem schmalen Energiebereich  $\varepsilon$  um die kritische Energie. Da bei genügend kleinem  $\varepsilon$  die energetisch benachbarten Zustände vergleichbar in Struktur und Ausdehnung sind, wird der kritische Exponent  $\nu$  nicht beeinflusst. Mit der Energie  $\varepsilon$  ist eine Phasenmittlungszeit

$$\tau_{\text{ph}} = \hbar/\varepsilon \quad (6.27)$$

verknüpft, beziehungsweise über die Diffusionskonstante  $D$  eine charakteristische Länge

$$L_{\text{ph}}^2 = D\tau_{\text{ph}} \quad (6.28)$$

über die sich die Phasen, um es im „Perkolationsbild“ auszudrücken, von energetisch benachbarten Trajektorien im Energieintervall  $\varepsilon$  ausmitteln. Die durch  $\varepsilon$  eingeführte Niveauverbreiterung der Eigenenergien entspricht einem Imaginärteil der Frequenz. Dieser ist in der Wirkung ähnlich einer Temperatur und führt daher zu einer Mittelung der Beiträge in einem Energiebereich  $\varepsilon \approx k_{\text{B}}T$  um die Fermi-Kante. Gilt nun für die thermische Diffusionslänge

$$L_{\text{th}} = L_{\text{ph}}(\varepsilon = k_{\text{B}}T) = \sqrt{\frac{\hbar D}{k_{\text{B}}T}} \quad (6.29)$$

die Bedingung

$$L_{\text{in}} > L > L_{\text{th}} \quad (6.30)$$

dann verschwinden aufgrund der Phasenmittlung die MCFs und erlauben die „ungestörte“ Beobachtung des kritischen Skalenverhaltens.

Da die numerische Analyse des LD-Überganges nun ebenfalls zeigt, daß Skalenverhalten ohne MCFs beobachtbar ist, kann an den experimentellen Resultaten nicht mehr gezweifelt werden.

Es ist deshalb auch anzunehmen, daß für den Exponenten  $\eta' = D_2$  ein direkter experimenteller Nachweis in einem vergleichbaren Finite-Size-Scaling-Experiment bei tiefen Temperaturen möglich ist. Damit wäre eine direkte Bestimmung der Korrelationsdimension und ein Nachweis der anomalen Diffusion beim Quanten-Hall-Effekt greifbar\*.

---

\*Eine Möglichkeit  $\eta$  über den Einfluß der multifraktalen Struktur der Wellenfunktion auf inelastische Prozesse zu bestimmen wurde von T. Brandes, L. Schweitzer und B. Kramer<sup>24</sup> vorgeschlagen.

## 6.3.2 Das Skalenverhalten der dynamischen Leitfähigkeit

### 6.3.2.1 Anomale Diffusion

J. T. Chalker und Mitarbeiter<sup>36-40</sup> haben gezeigt, daß die Wellenfunktionen bei Quanten-Hall-Bedingungen *anomales* Diffusionsverhalten am LD-Phasenübergang aufweisen. Der ensemble-gemittelte Dichte-Korrelator

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E, \omega) = \overline{\langle \mathbf{r} | \delta(E + \hbar\omega/2 - H) | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \delta(E - \hbar\omega/2 - H) | \mathbf{r} \rangle} \quad (6.31)$$

skaliert bei gaußscher weißer Unordnung wie

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E, 0) \propto |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\eta}. \quad (6.32)$$

Insbesondere kann im hydrodynamischen Regime die Wellenvektor- und Frequenzabhängigkeit der Spektralfunktion

$$S(\mathbf{q}; E, \omega) = \int d^2r e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} S(\mathbf{r}, 0; E, \omega) \quad (6.33)$$

mit Hilfe der Diffusionskonstanten parametrisiert werden:

$$S(q, \omega) = \frac{\varrho(E)}{\pi\hbar} \frac{D(q, \omega)q^2}{\omega^2 + [D(q, \omega)q^2]^2} \quad (6.34)$$

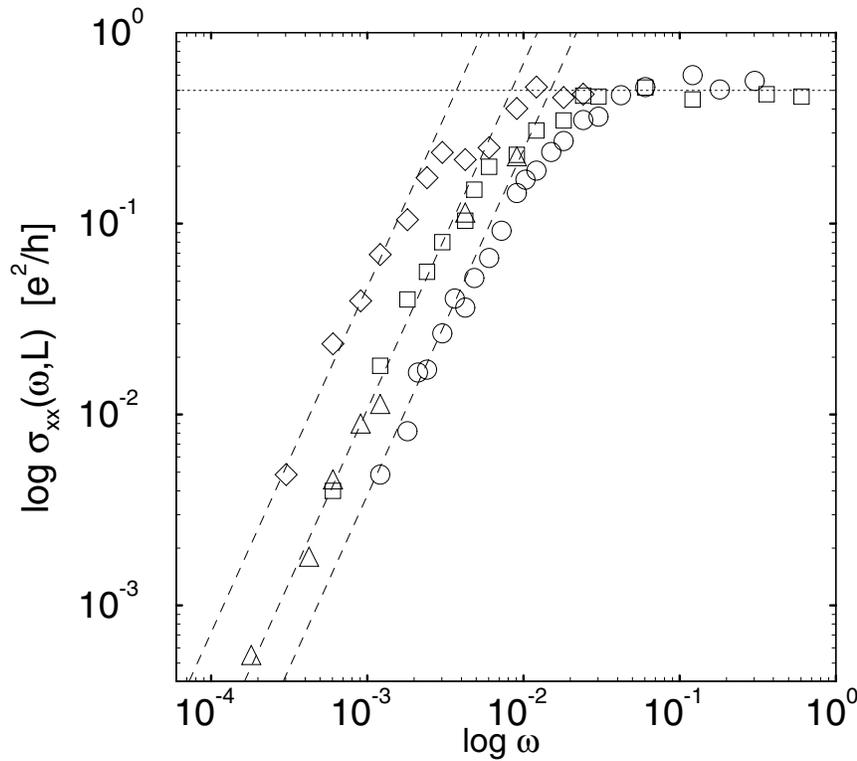
Üblicherweise, d. h. bei „normaler“ Diffusion, ist die Diffusionskonstante  $D = \text{const.}$

Aus einer einfachen Annahme über die Homogenität der Dichte-Korrelationsfunktion unter einer kombinierten Energie- und Längenskalentransformation folgt<sup>38</sup> für die allgemeine Form der von  $\omega$  und  $q$  abhängige Diffusionsfunktion

$$D(q, \omega) = \begin{cases} D_0 \left[ c\varrho(E) \frac{\omega}{q^2} \right]^{\eta/2}, & q^2/\omega > \hbar c\varrho(E) \\ D_0, & q^2/\omega < \hbar c\varrho(E) \end{cases} \quad (6.35)$$

Diese Form wurde durch numerische Untersuchungen, die auf einer exakten Diagonalisierung beruhen, bestätigt<sup>39</sup>. Das System zeigt also einen Crossover von einem diffusiven Regime, das durch eine Diffusionskonstante  $D_0$  bestimmt wird, zu einem Regime in dem die Diffusionsfunktion in nicht-trivialer Weise vom Verhältnis  $q^2/\omega$  abhängt. Für Elektronen im untersten Landau-Band, die sich in einem gaußschen weißen Zufallspotential bewegen, erhalten die Autoren  $c \approx 60$  und den kritischen Exponenten  $\eta = 0.38 \pm 0.04$ .

Erste Hinweise auf anomales Diffusionsverhalten wurden von F. J. Wegner<sup>164</sup> gegeben. Mit Hilfe von Renormierungsgruppen-Argumenten fand er für die Dichtekorrelationsfunktion beim orthogonalen Ensemble Skalenverhalten der Form  $S(q, \omega) \propto (\omega r^2)^{-\eta/2}$ . Das anomale Diffusionsverhalten kann durch die Zeitentwicklung von Wellenpaketen veranschaulicht werden. Ein Wellenpaket, das aus den multifraktalen Zuständen in der



**Abbildung 6.10:** Doppelt-logarithmische Auftragung der dynamischen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(\omega)$  bei kurzreichweitigen Potentialen ( $\lambda = 0$ ) und Systemen der Breite  $L = 15$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\delta = -0.0560$  ( $\circ$ ),  $L = 20$ ,  $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\delta = -0.0520$  ( $\square$ ),  $L = 20$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\delta = -0.0132$  ( $\triangle$ ) und  $L = 30$ ,  $\varepsilon = 2 \times 10^{-5}$ ,  $\delta = -0.0460$  ( $\diamond$ ).

Nähe des LD-Überganges aufgebaut ist, zeigt bei großen Zeiten  $t$  eine erhöhte Wahrscheinlichkeit  $p(t) \propto t^{-D_2/2} \propto t^{-1+\eta/2}$  am Ausgangspunkt zu bleiben, während die Varianz weiterhin das konventionelle Verhalten  $\langle R^2 \rangle(t) \propto t$  aufweist<sup>74</sup>. Das Wellenpaket ändert also im Laufe der Zeit seine Form, erreicht jedoch nie die asymptotische gaußsche Form der Lösungen der Diffusionsgleichung<sup>39</sup>.

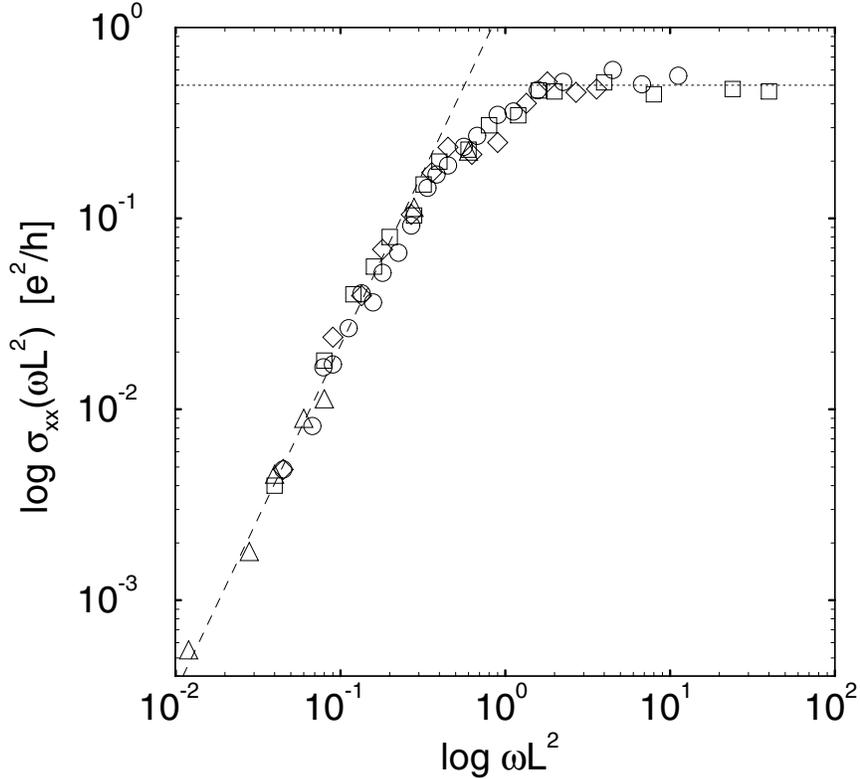
In Abbildung 6.10 sind die Resultate aus der Berechnung der dynamischen Leitfähigkeit für kurzreichweitige Potentiale über einen weiten Frequenzbereich dargestellt.  $\sigma_{xx}(\omega, \varepsilon, L)$  wurde in drei Systemen verschiedener Breite berechnet:

Für  $L = 15$  mit  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $L = 20$  mit  $\varepsilon = 10^{-5}$  und  $5 \times 10^{-5}$ , und für  $L = 30$  mit  $\varepsilon = 2 \times 10^{-5}$ . Die Frequenz wurde im Bereich  $3 \times 10^{-5} < \hbar\omega < 0.01$  variiert.

Im Bereich kleiner Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$  zeigt die Leitfähigkeit Skalenverhalten mit einer Potenz  $\omega^{\eta''}$ . (Man vergleiche auch mit der Diskussion in Abschnitt 6.4.2.1, insbesondere mit der ersten Figur.)

Die Abschätzung des Exponenten  $\eta''$  kann verbessert werden, wenn man ausnützt, daß für kleine Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$  ein endlicher Wert des Einschaltparameters  $\varepsilon$  einen kleinen, im wesentlichen konstanten Beitrag  $\delta$  zum Realteil der dynamischen Leitfähigkeit

liefert — die funktionale Form von  $\sigma(\omega \rightarrow 0)$  wird nicht mehr merklich beeinflusst. Eliminiert man diesen Effekt, indem man den Offset  $\delta$  subtrahiert, erhält man eine sehr genaue Approximation für das Skalenverhalten bei kleinen Frequenzen. Diese Vorgehensweise wurde bereits im Abschnitt 4, beim Niederfrequenzverhalten der dynamischen Leitfähigkeit im eindimensionalen Anderson-Modell, gezeigt.



**Abbildung 6.11:**  $\log \sigma_{xx}(\omega L^2)$  gegen  $\log \omega L^2$  bei kurzreichweitigen Potentialen ( $\lambda = 0$ ) und Systemen der Breite  $L = 15$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$  ( $\circ$ ),  $L = 20$ ,  $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$  ( $\square$ ),  $L = 20$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$  ( $\triangle$ ), und  $L = 30$ ,  $\varepsilon = 2 \times 10^{-5}$  ( $\diamond$ ). Alle Datenpunkte fallen auf eine Kurve. Die gestrichelte Linie zeigt das angepaßte Potenzgesetz mit dem Exponenten  $2 - \eta/2 = 1.81 \pm 0.05$ . Für den kritischen Wert  $\sigma_{xx}^c$  erhält man  $(0.50 \pm 0.02) e^2/h$ .

Zum einen kann man das Potenzgesetz simultan mit dem Offset anpassen, zum anderen kann man den berechneten endlichen Wert von  $\sigma_{xx}(0)$  subtrahieren. Die erste Methode erwies sich als etwas genauer, da sie nicht von der Ungenauigkeit eines einzelnen Datenpunktes bei  $\omega = 0$  abhängt. Die Resultate für die adjustierten Werte von  $\sigma_{xx}(\omega, L)$  sind in Abbildung 6.10 dargestellt. Trägt man die dynamische Leitfähigkeit als Funktion von  $\omega L^z$  auf, Abbildung 6.11, kann man die Kurven zur Deckung bringen. Die Datenpunkte fallen auf eine universelle Kurve über einen Bereich von vier Größenordnungen in  $\omega L^z$  mit einem dynamischen Exponenten  $z = 2.00 \pm 0.05$ . Die Anpassung eines Potenzgesetzes für alle Datenpunkte in Abbildung 6.11 mit  $\omega L^2 < 2 \times 10^{-1}$  ergibt den Exponenten  $\eta'' = 1.81 \pm 0.05$  (gestrichelte Linien).

Aus der allgemeinen Beziehung zwischen der Spektraldarstellung der Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion  $S(\mathbf{q}, \omega)$  und dem Imaginärteil der Strom-Strom-Korrelationsfunktion (2.9)

$$\Phi''(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\omega^2}{q^2} S(\mathbf{q}, \omega) \quad (6.36)$$

erhält man im Limes  $\omega \rightarrow 0$  den Zusammenhang zwischen den Exponenten

$$\eta'' = 2 - \eta/2 \quad (6.37)$$

Damit ist  $\eta = 0.38 \pm 0.10$  in Übereinstimmung mit J.T. Chalkers früheren Ergebnissen aus Berechnungen der Dichtekorrelationsfunktion und dem im vorigen Abschnitt diskutierten Skalenverhalten der statischen Leitfähigkeit.

### 6.3.2.2 Der Leitfähigkeitsfixpunkt

Um die kritische Leitfähigkeit zu bestimmen, wurden alle Datenpunkte mit  $\omega L^2 > 2$  in einem Fit benutzt (Abbildung 6.11, gestrichelte Linie). Es ergibt sich damit für ein kurzreichweitiges Potential in der Mitte des niedrigsten Landau-Bandes der

kritische Leitfähigkeitsfixpunkt

$$\sigma_{xx}^c = (0.50 \pm 0.02) \frac{e^2}{h} \quad (6.38)$$

Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem vorgeschlagenen universellen Wert<sup>86</sup> von  $\sigma_{xx}^c = e^2/2h$  überein und bestätigt den im vorigen Abschnitt aus dem Skalenverhalten der statischen Leitfähigkeit gefundenen Wert.

## 6.4 Die Leitfähigkeit bei langreichweitigen Potentialen

### 6.4.1 Semiklassische Theorie der Long-Time-Tails

Im Hochfeld-Limes  $B \rightarrow \infty$  wird das Impurity-Potential glatt auf der Skala der magnetischen Länge  $\ell$ . Die Elektronen bewegen sich dann entlang der Äquipotentiallinien. Man kann zeigen, daß der LD-Übergang, der für das Auftreten der Hall-Plateaus benötigt wird, auf einen Perkolationsübergang von offenen zu geschlossenen Äquipotentiallinien abgebildet werden kann<sup>158</sup>. Auch die Frequenzabhängigkeit der diagonalen Leitfähigkeit in den Plateaus wurde mit dem Modell klassischer Trajektorien beschrieben<sup>83</sup>.

Die Lokalisierungslänge  $\xi$  divergiert beim kritischen Füllfaktor mit dem Exponenten  $\nu_{cl} = \frac{4}{3}$  und die fraktale Dimension der perkolierenden Höhenlinie ist durch den kritischen Exponenten der externen Hülle des Perkolations-Clusters

$$d_h = 1/\nu + 1 = \frac{7}{4} \quad (6.39)$$

gegeben<sup>76, 144, 145, 162</sup>.

Die Frequenzabhängigkeit der diagonalen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(\omega)$  bei halb gefülltem Landau-Band wurde kürzlich von F. Evers<sup>45</sup> im Rahmen eines semiklassischen Modells untersucht. Die Bezeichnung „semiklassisch“ rührt daher, daß die Zahl der Zustände  $\rho(E)$  auf einer Höhenlinie nahe der kritischen Energie durch ein semiklassisches Argument bestimmt wird. Als ein wesentliches Resultat erhält man einen endlichen Wert für die statische Leitfähigkeit. Es wird gezeigt, daß im thermodynamischen Limes die Beträge der geschlossenen Äquipotentiallinien wichtig sind und letztendlich für den endlichen Wert bei  $\omega = 0$  sorgen.

Bei offenen Höhenlinien zerfällt die Geschwindigkeitskorrelationsfunktion

$$\Phi(t) = \langle v_x(t)v_x(0) \rangle \quad (6.40)$$

mit einem Potenzgesetz

$$\Phi(t) \propto t^{\delta-1} \quad \text{mit} \quad \delta = 2/d_h - 1 = \frac{1}{7} \quad (6.41)$$

zeigt also ein *Long-Time-Tail* (numerisch  $\delta = 0.14 \pm 0.005$ ). Dem entspricht im Frequenzraum im Limes  $\omega \rightarrow 0$  eine Divergenz

$$\Phi(\omega) \propto \omega^{-\delta}. \quad (6.42)$$

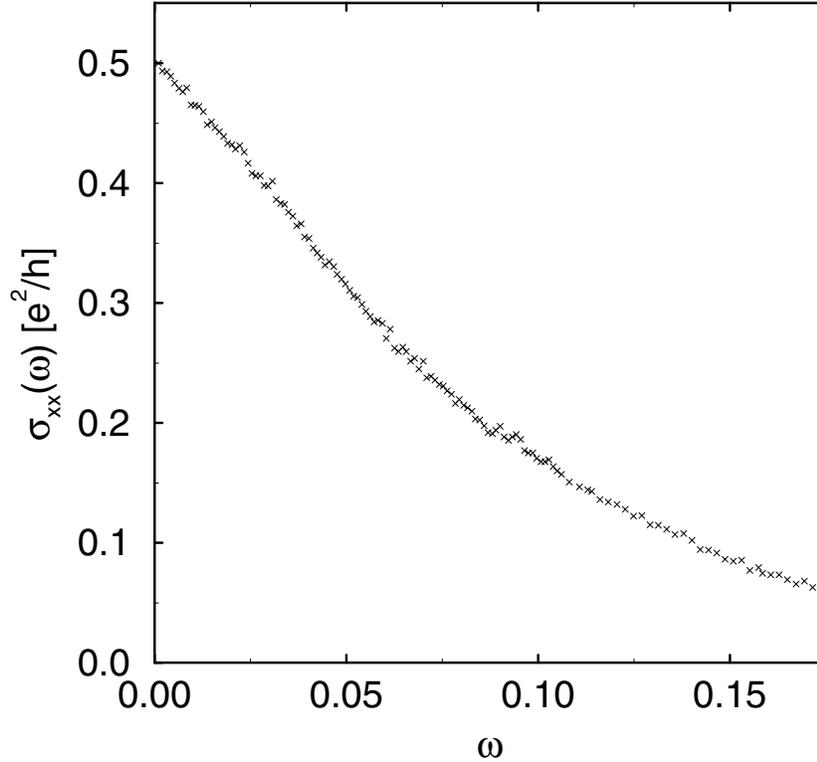
Dies folgt einfach aus dem Zusammenhang zwischen der absoluten Distanz  $R$  und der Weglänge  $l$ , die ein Teilchen auf einer Äquipotentiallinie zurücklegt,

$$R \propto l^{1/d_h} \quad (6.43)$$

und dem Zeitintegral der Korrelationsfunktion

$$R^2 \propto t \int_0^t dt' \Phi(t'), \quad (6.44)$$

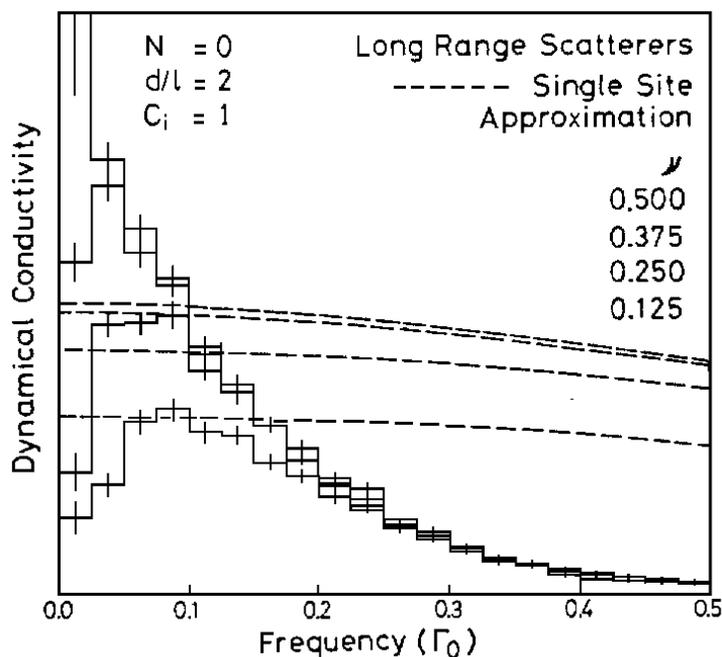
wenn man annimmt, daß bei der kritischen Energie die Weglänge  $l$  im wesentlichen proportional zur Zeit  $t$  ist — das Teilchen also eine nicht-verschwindende mittlere Geschwindigkeit besitzt, wenn man sich mit der Energie der Perkolationsschwelle nähert (auch dies wurde numerisch überprüft).



**Abbildung 6.12:** Die dynamische Leitfähigkeit aus  $\Phi'(\omega)$  im semiklassischen Modell<sup>45</sup>. Die Frequenz ist auf die Breite  $\Gamma$  der Zustandsdichte bei  $d = 2\ell$  normiert, siehe (6.12). Die dargestellten, neueren Präzisionsdaten wurden freundlicherweise von F. Evers zur Verfügung gestellt.

Im unendlich großen System ist der Beitrag der unendlich ausgedehnten Zustände zu  $\Phi(\omega)$  bei  $\omega = 0$  singulär, aber deren Dichte ist verschwindend gering. Berücksichtigt man hingegen die Beiträge der endlichen Zustände mit ihrem entsprechenden Gewicht, erhält man im thermodynamischen Limes einen endlichen Wert. Dieser ist verblüffenderweise  $\sigma_{xx}^c = (0.50 \pm 0.03) e^2/h$ , wie die numerische Simulation ergibt. Das semiklassische Modell weist also den selben universellen kritischen Wert wie das vollständige, quantenmechanische Problem auf!

Ein weiterer signifikanter Einfluß der Beiträge der geschlossenen Äquipotentiallinien zeigt sich im Frequenzverhalten (Abbildung 6.12). Bei endlichen, aber kleinen Frequenzen  $\omega$ , ergibt die numerische Simulation der Geschwindigkeitskorrelation eine deutliche



**Abbildung 6.13:** Dynamische Leitfähigkeit im niedrigsten Landau-Niveau ( $N = 0$ ) bei langreichweitigen Streuern ( $d = 2\ell$ ) nach T. Ando<sup>8</sup>. Die Frequenz ist auf die Breite  $\Gamma_0$  des 0. Landau-Niveaus normiert. Der mittlere Abstand der Streuer beträgt einen Larmorradius ( $c_i = 1$ ). Der höchstliegenden, gestrichelten Kurve entspricht bei der Frequenz  $\omega = 0$  ein Wert von  $\sigma_{xx}(0) = e^2/\pi h \approx 0.318 e^2/h$

Abweichung vom konventionellen Drude-Verhalten.  $\Phi'(\omega)$  zeigt ein Potenzverhalten der Form

$$\Phi'(\omega) = \Phi'(0) - c|\omega|^{-\delta'}, \quad (6.45)$$

mit  $\delta' \approx -1$  (Abbildung 6.12). (gestrichene Symbole kennzeichnen über alle Höhenlinien gemittelte Größen.) Als Funktion der Zeit ergibt dies die Korrelationsfunktion

$$\Phi'(t) \propto t^{\delta'-1} \quad (6.46)$$

Der beobachtete Wert von  $\delta' = -1$  würde sogar eine Spitze, d. h. nicht-analytisches Verhalten, bei  $\omega = 0$  bedeuten. Die Geschwindigkeitskorrelation weist also in der Zeit ein *Long-Time-Tail* mit  $t^{-2}$  auf!

Eine Andeutung dieses Verhaltens, zumindest im Fall langreichweitiger Streuer, ist möglicherweise bereits in den (auf Diagonalisierung basierenden) numerischen Simulationen von T. Ando<sup>8</sup>, sichtbar: In Abbildung 6.13 ist die dynamische Leitfähigkeit im niedrigsten Landau-Niveau für zufallsverteilte, gaußförmige Impurities der Breite  $d = 2\ell$  als Funktion der Frequenz dargestellt. Bei halbem Füllfaktor fällt  $\sigma_{xx}(\omega)$  von  $\sigma_{xx} = 0.5 e^2/h$  in etwa linear ab (wenn man den ersten Datenpunkt ganz oben verwirft) und geht dann in einen exponentiellen Abfall über.

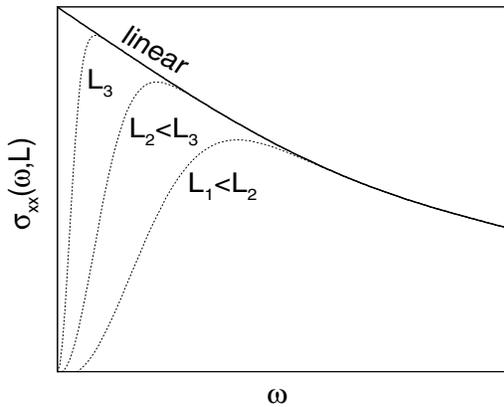
P. Kratzer<sup>98</sup> konnte eine solche Abweichung vom Drude-Verhalten auch bei einer zeitabhängigen Simulation mit Hilfe von quantenmechanischen Wellenpaketen beobachten. Systematische Probleme führen allerdings zu einer kritischen Leitfähigkeit, die bei einer Reichweite von  $d = 1 \dots 4\ell$  im Bereich  $\sigma_{xx}^c = 0.098 \dots 0.22 e^2/h$  liegt, also nur etwa 40 % des universellen Wertes beträgt<sup>97</sup>. Dennoch erhält man einen Hinweis auf potenzförmigen Zerfall der Geschwindigkeitskorrelationsfunktion mit der Abschätzung  $\delta' \approx -1.3$ .

Im folgenden soll nun definitiv gezeigt werden, daß der lineare Abfall in  $\sigma_{xx}(\omega)$  für kleine Frequenzen aus dem semiklassischen Modell gegenüber quantenmechanischen Korrekturen stabil ist, d. h. im Falle langreichweitiger Potentiale ( $\lambda = 2\ell$ ) in einer frequenzabhängigen Rechnung wiedergefunden wird. Ein direkter Vergleich zwischen dem semiklassischen und dem quantenmechanischen Verhalten kann vorgenommen werden.

## 6.4.2 Resultate der quantenmechanischen Rechnung

### 6.4.2.1 Long Time Tails

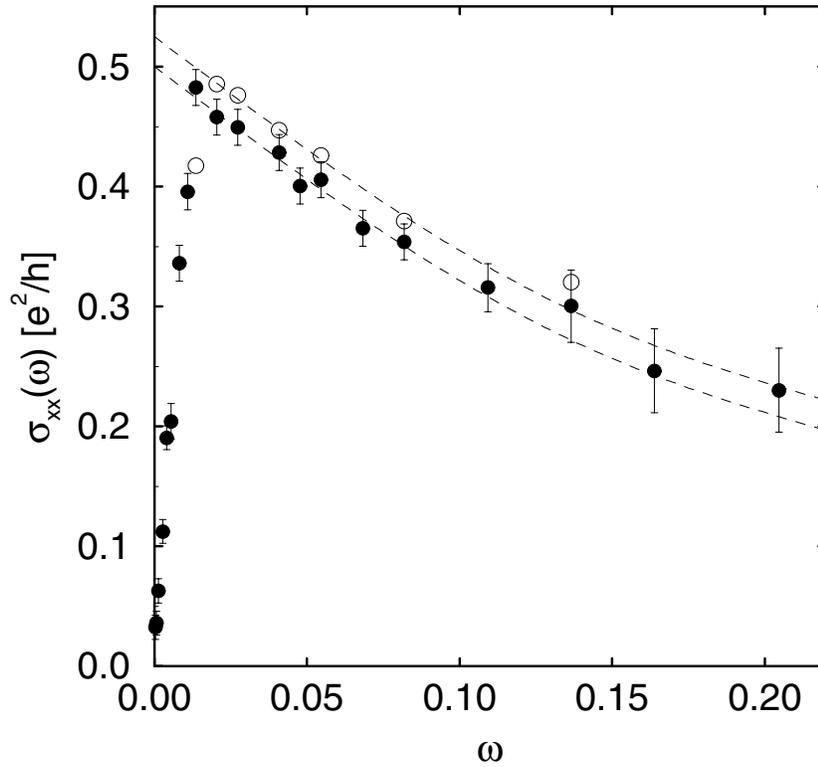
Das Verhalten der dynamischen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(\omega)$  hängt oberhalb einer typischen Frequenz  $\omega_L$  nicht mehr von der Systemgröße  $L$  ab (vgl. Abbildung 6.10). Mit wachsendem  $L$  wird  $\omega_L$  kleiner — im thermodynamischen Limes schließt sich das Leitfähigkeits-Gap (bis auf möglicherweise einen singulären Punkt bei  $\omega = 0$ ).



Die nebenstehende Skizze verdeutlicht den Einfluß der Systemgröße auf die dynamische Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(\omega, L)$ . Bei zu kleinen Systemen kann das Niederfrequenzverhalten im thermodynamischen Limes noch nicht beobachtet werden, da aufgrund des Skalenverhaltens mit dem Potenzgesetz  $(\omega L^2)^{\eta''}$  das Leitfähigkeits-Gap noch zu breit ist (vgl. auch mit den eindimensionalen Modellrechnungen in Kapitel 4). In den numerischen Rechnungen erwiesen sich Systembreiten von  $L = 30$  als ausreichend, um das

Frequenzverhalten von  $\sigma(\omega)$  bis zu genügend tiefen Frequenzen verfolgen zu können, bis das Potenzgesetz (6.45) eindeutig nachweisbar war.

Um das systematische Verhalten von  $\sigma_{xx}(\omega)$  mit dem Infinitesimalparameter  $\varepsilon$ , insbesondere einen eventuellen Einfluß auf das Potenzverhalten (6.45) zu untersuchen, wurde die Rechnung für zwei Werte  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  und  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$  durchgeführt. Im ersten Fall wurden zwischen  $N = 1.5 \times 10^5$  und  $N = 2 \times 10^5$  Iterationsschritte pro Frequenzpunkt durchgeführt. Im Falle des letzteren, bereits extrem kleinen Wertes von  $\varepsilon$  wurden bis zu  $N = 5 \times 10^5$  Iterationsschritte durchgeführt und über jeweils 3 bis 5 Systeme gemittelt, um genauere Aussagen über den statistischen Fehler treffen zu können.

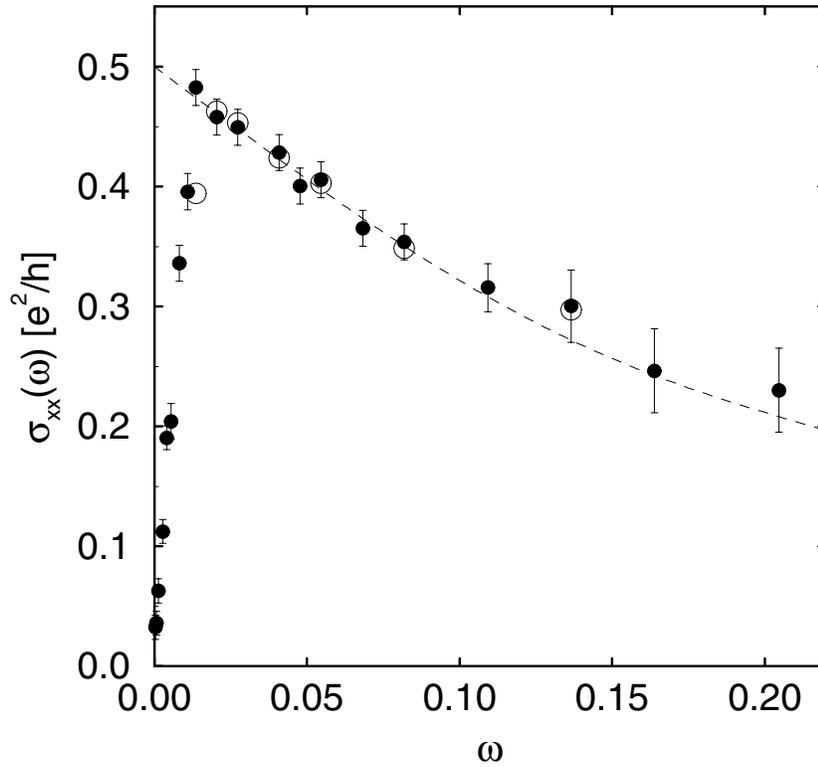


**Abbildung 6.14:**  $\sigma_{xx}(\omega)$  bei langreichweitigem Impurity-Potential ( $\lambda = 2\ell$ ) und Systembreite  $L = 30$  mit  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$  ( $\bullet$ ) und  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  ( $\circ$ ). Der lineare Abfall mit der Frequenz vom Fixpunkt aus, ist gestrichelt angedeutet.

Die dynamische Leitfähigkeit zeigt, wie in Abbildung 6.14 zu erkennen ist, zwei scharf getrennte Bereiche:

- Bei kleinen Frequenzen zeigt sich das *Regime der anomalen Diffusion*, das in Abschnitt 6.3.2 für den Fall  $\lambda = 0$  bereits diskutiert wurde. Hier macht sich der Einfluß der endlichen Systemgröße bemerkbar und  $\sigma_{xx}(\omega, L)$  zeigt Skalenvverhalten in  $\omega L^z$ . Dieser Bereich wird im nächsten Abschnitt 6.4.2.3 untersucht.
- An das „Leitfähigkeits-Gap“ schließt sich ein, durch einen relativ klar definierten Übergang getrennter Bereich an, der im folgenden als *semiklassisches Regime* bezeichnet werden soll. Dieser ist gekennzeichnet durch einen linearen Abfall der frequenzabhängigen Leitfähigkeit gemäß (6.45) mit  $\delta' \approx -1$ .

Wie in Abbildung 6.15 deutlich zu sehen ist, können die Datenpunkte für  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  mit den Datenpunkten bei  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$  durch eine konstante Verschiebung  $\Delta\sigma \approx -0.025 e^2/h$  zur Deckung gebracht werden. Das heißt, der Einfluß von  $\varepsilon$  auf das Potenzverhalten in  $\omega$  ist im Bereich dieser sehr kleinen Infinitesimalparameter bereits vernachlässigbar. Ähnlich wie im Abschnitt 6.3.2 verursacht ein sehr kleiner Infinitesimalparameter im wesentlichen nur noch einen konstanten Offset  $\Delta\sigma$  in der Leitfähigkeit.

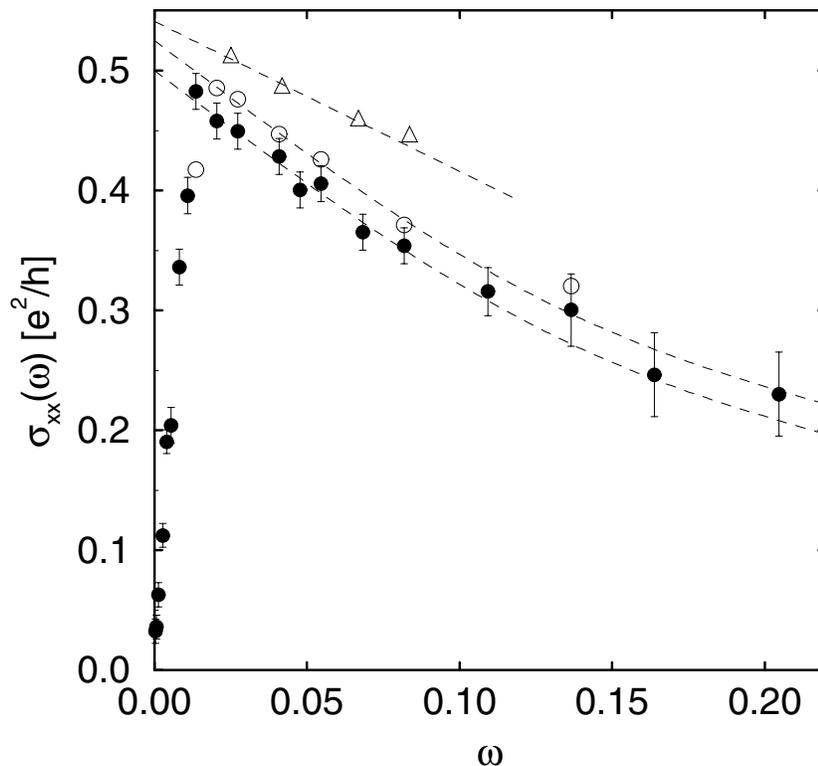


**Abbildung 6.15:**  $\sigma_{xx}(\omega)$  bei langreichweitigem Impurity-Potential ( $\lambda = 2\ell$ ) und Systembreite  $L = 30$  mit  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$  ( $\bullet$ ). Die Datenpunkte ( $\circ$ ) für  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$  können durch eine konstante Verschiebung  $\Delta\sigma \approx -0.025 e^2/h$  mit ( $\bullet$ ) zur Deckung gebracht werden.

Bei dem größeren Wert von  $\varepsilon$  ist eine stärkere Abrundung der Kante zu beobachten, die den anomalen Bereich vom semiklassischen Bereich trennt. Dieser Effekt ist darin begründet, daß bei endlichem  $\varepsilon$  eine charakteristische Zeit  $\tau = \hbar/\varepsilon$  eingeführt wird. Das damit verbundene zusätzliche exponentielle Zerfallsgesetz  $\exp(-t/\tau)$  führt zu einem Drude-artigen Verhalten bei kleinen Frequenzen. Da einem kleinen, endlichen Wert von  $\varepsilon$  im wesentlichen eine Aufweichung der Fermi-Kante durch eine nichtverschwindende Temperatur entspricht, führen auch endliche Temperaturen zu einem Drude-Verhalten.

Der beobachtete lineare Abfall von  $\sigma_{xx}(\omega)$  vom kritischen Wert im vollständigen quantenmechanischen Modell impliziert, daß diese signifikante Abweichung vom konventionellen Drude-Verhalten auch experimentell nachweisbar sein sollte: Nimmt man bei einem langreichweitigen Impurity-Potential eine Varianz von  $\Gamma \approx 10^{-1}\hbar\omega_c$  an, liegt lineares Verhalten in der dynamischen Leitfähigkeit etwa bis zu einer Frequenz von  $\omega \approx 10^{-2}\omega_c$  vor. Bei einer Zyklotronfrequenz von  $\omega_c \approx 10^{13}$  Hz (Heterostruktur,  $B = 6T$ ,  $m^* = 0.067 m_e$ ,  $\varepsilon_{\text{diel}} = 12.9$ ) sollte eine deutliche Abweichung vom konventionellen Drude-Verhalten im Frequenzbereich von MHz bis GHz nachweisbar sein. Da sowohl inelastische Streuung, charakterisiert durch einen Zerfall von Korrelationen mit  $\exp(-t/\tau_{\text{in}})$ , als auch die Aufweichung der Fermi-Kante zu einem Drude-artigen Verhalten führen würde, sollten Tieftemperaturexperimente im mK-Bereich geeignet

sein, die Existenz von Long-Time-Tails nachzuweisen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß in diesem Modell Wechselwirkungseffekte zwischen den Elektronen vernachlässigt wurden. Die Energien von kollektiven Anregungen liegen typischerweise ebenfalls in diesem Frequenzfenster, so daß diese der Niederfrequenz-Anomalie überlagert sein könnten.



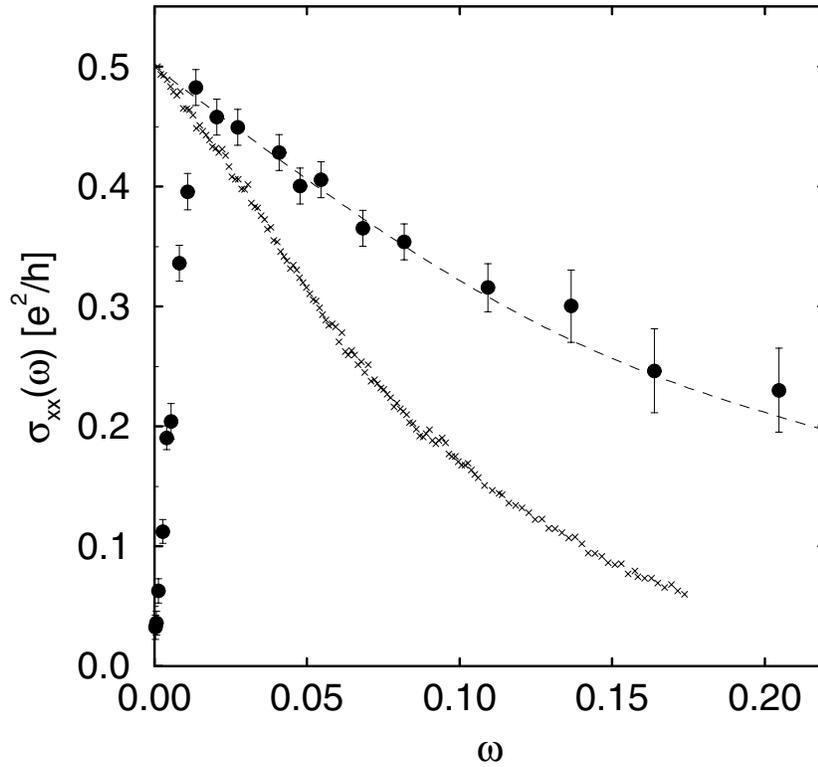
**Abbildung 6.16:**  $\sigma_{xx}(\omega)$  in Abhängigkeit von der Potentialreichweite. Dargestellt ist  $\lambda = 1\ell$  ( $\Delta$ ) und  $\lambda = 2\ell$  ( $\circ$ ) für Systeme der Breite  $L = 30$  mit  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ , sowie für  $\lambda = 2\ell$ ,  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$ ,  $L = 30$  ( $\bullet$ )

Der Vergleich von Systemen mit Potentialen unterschiedlicher Reichweite (Abbildung 6.16) mit  $\lambda = 1\ell$ , ( $\Delta$ ) und  $\lambda = 2\ell$ , ( $\circ$ ) zeigt, daß mit wachsender Reichweite der Abfall von  $\sigma_{xx}(\omega)$  etwas steiler wird. Bei der Reichweite  $\lambda = 0$  läuft, wie im vorigen Abschnitt 6.3.2 festgestellt wurde,  $\sigma_{xx}(\omega)$  annähernd waagrecht ein (Abbildung 6.11).

Längere Potentialreichweiten als  $\lambda \approx 2\ell$  sprengen allerdings, im Rahmen dieser Methode, momentan jeden vernünftigen Rahmen an verfügbaren Rechenzeiten.

Abbildung 6.17 zeigt den direkten Vergleich mit den Resultaten aus dem semiklassischen Modell. Dazu wurde die Frequenzskala aus dem semiklassischen Modell auf die Breite der semiklassischen Zustandsdichte normiert<sup>45</sup>.

Da im semiklassischen Modell der Effekt der quantenmechanischen Phasen vollständig fehlt, ist es nicht zu erwarten, daß die Kurven für die frequenzabhängigen Leitfähigkeiten aufeinanderfallen. Im Chalkerschen Netzwerkmodell<sup>37, 106</sup> zum Beispiel wird der Weg zwischen zwei Sattelpunkten im Random-Potential durch die zufällig ausgewürfelten Phasen simuliert. Längen- und Zeitskalen sind also mit der Phase verknüpft, die die



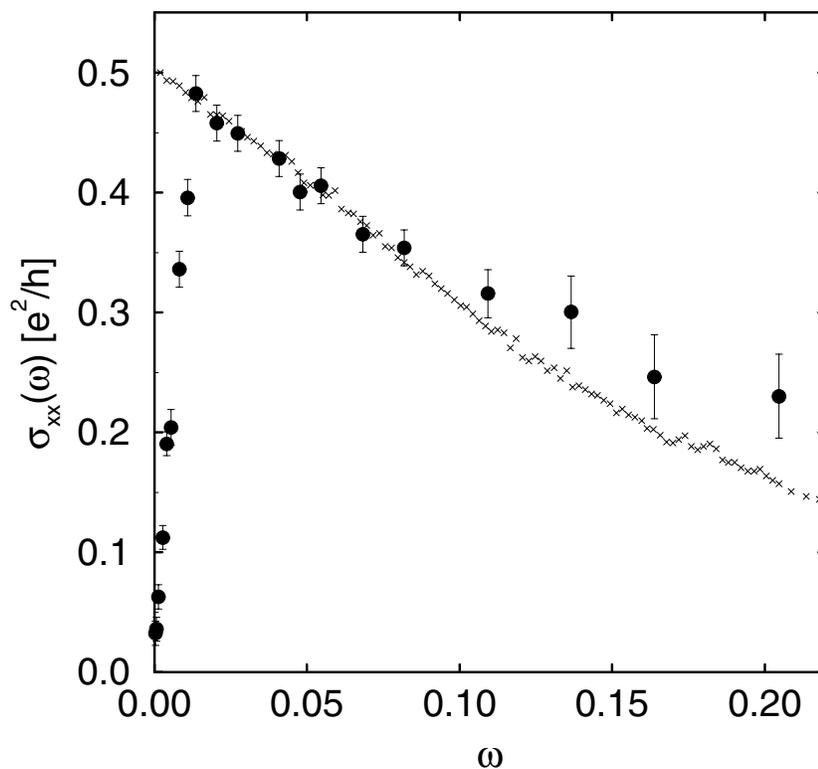
**Abbildung 6.17:**  $\sigma_{xx}(\omega)$  bei langreichweitigem Impurity-Potential ( $\lambda = 2\ell$ ) und einer Systembreite von  $L = 30$  und  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$  ( $\bullet$ ). Der lineare Abfall mit der Frequenz, vom Fixpunkt  $\sigma_{xx}^c = (0.50 \pm 0.02)e^2/\hbar$  aus, ist gestrichelt angedeutet. Zum Vergleich ist das Resultat aus dem semiklassischen Modell ( $\times$ ) eingezeichnet.

Wellenfunktion entlang des Weges zwischen den Sattelpunkten „aufammelt“. Durch die Einbeziehung der Phase sollte deshalb die Zeit- bzw. Frequenzskala des semiklassischen Modells renormiert werden. Das berechtigt dazu, die Kurven durch Umskalieren der Frequenzachse zum Vergleich einfach aufeinander zu schieben. Das Resultat ist in Abbildung 6.18 dargestellt und zeigt eine hervorragende Übereinstimmung im Bereich von kleinen Frequenzen.

#### 6.4.2.2 Der universelle Leitfähigkeitsfixpunkt

Wie der Abbildung 6.15 entnommen werden kann, erhält man zusammen mit dem Potenzverhalten einen genauen Wert für die kritische Leitfähigkeit. Die Extrapolation des linearen Verhaltens auf  $\omega = 0$  ergibt bei den Daten für  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$  einen Regressionswert von  $\sigma_{xx}^c = (0.50 \pm 0.01)e^2/h$ . Der maximale systematische Fehler, der aufgrund des endlichen Wertes von  $\varepsilon$  noch möglich wäre, ist in jedem Fall kleiner als die bereits diskutierte konstante Verschiebung  $\Delta\sigma$ . Damit liegt  $\sigma_{xx}^c$  auch bei dem langreichweitigen Potential mit Sicherheit innerhalb der Fehlerschranken  $(0.50 \pm 0.02)e^2/h$ .

Zusammen mit den Resultaten für die kritische Leitfähigkeit aus dem Skalenverhalten



**Abbildung 6.18:** Wie vorherige Abbildung 6.17. Nur wurde die Frequenzkala des semiklassischen Modells so skaliert, daß die Kurven für die frequenzabhängige Leitfähigkeit aufeinander fallen.

der statischen Leitfähigkeit bei kurzreichweitigen Potentialen ( $\lambda = 0$ , Abschnitt 6.3.1) und aus der Berechnung der dynamischen Leitfähigkeit ( $\lambda = 0$ , Abschnitt 6.3.2) erhält man ein starkes Argument dafür, daß die Potentialkorrelationslänge eine irrelevante Längenskala für die statische Leitfähigkeit darstellt. Die numerischen Resultate für das unterste Landau-Band und ein Impurity-Potential mit einer Korrelationslänge von bis zu  $\lambda = 2\ell$  unterstützen klar die Hypothese eines

universellen Leitfähigkeitsfixpunktes bei

$$\sigma_{xx}^c = (0.50 \pm 0.02) \frac{e^2}{h}. \quad (6.47)$$

### Vergleich mit Theorie und Experiment

Ältere Theorien, in denen eine analytische Berechnung der statischen Leitfähigkeit durchgeführt wird, behandeln das Zufalls-Potential in störungstheoretischer Näherung, wobei die Auswahl der Klasse von Diagrammen im allgemeinen eine unkontrollierte Näherung darstellt.

Die selbstkonsistente Bornsche Näherung (SCBA) von T. Ando und Y. Uemura<sup>5</sup> ergibt im Grenzfalle kurzreichweitiger Potentiale  $\sigma_{xx} = (2n+1) e^2/\pi h$  in Abhängigkeit von der

Landau-Quantenzahl  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Mit wachsender Reichweite verschwindet jedoch die Leitfähigkeit. Die Diskrepanz zwischen dem SCBA-Ergebnis und der numerischen Simulation ist in Abbildung 6.13 zu sehen.

Aus der Kumulantennäherung von R. R. Gerhardts<sup>55</sup> folgt für die maximal erreichbare Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} = e^2/2h$ . Im untersten Landau-Band ist die Leitfähigkeit, im Falle von gaußförmigen Streuern, unabhängig von der Reichweite. Im Falle langreichweitiger Potentiale bleibt die Leitfähigkeit endlich.

S. Hikami und E. Brézin<sup>65, 66</sup> erhielten in einer störungstheoretischen Entwicklung bis zu hoher Ordnung mit Hilfe einer Borel-Padé-Technik bei einem gaußschen Zufallspotential für die statische Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} = (1.4/\pi) e^2/h = 0.45 e^2/h$ . Für große Reichweiten fanden sie sogar eine verschwindende Leitfähigkeit. Eine ähnliche Rechnung von R. R. P. Singh und S. Chakravarty<sup>155</sup> ergab  $\sigma_{xx} = (1.43/\pi) e^2/h = 0.46 e^2/h$  bei gaußschem weißen Rauschen und  $\sigma_{xx} = (1.03/\pi) e^2/h = 0.33 e^2/h$  für den räumlich korrelierten Fall mit  $\lambda = 1\ell$ .

Da in den feldtheoretischen Behandlungen des Quanten-Hall-Effekts (A. M. M. Pruisken<sup>107, 138, 141</sup>)  $\sigma_{xy}$  und  $\sigma_{xx}$  als Kopplungskonstanten auftreten, ergab sich die Frage, ob nicht möglicherweise auch beide Komponenten des Leitfähigkeitstensors einen universellen, von mikroskopischen Details unabhängigen Wert haben. (Die Werte der kritischen Exponenten und die Universalität von  $\sigma_{xx}^c$  konnten bis heute jedoch noch nicht aus dieser Theorie abgeleitet werden.) Solch eine Universalität wurde in einer Reihe von Arbeiten von D. H. Lee, S. Kivelson und S. C. Zhang<sup>105, 106</sup> vorgeschlagen.

Daraufhin durchgeführte numerische Untersuchungen von Y. Huo, E. Hetzel, R. N. Bhatt<sup>78</sup>, die auf der direkten Berechnung der Zwei-Teilchen-Spektralfunktion (6.31) mittels numerischer Diagonalisierung beruhen, ergaben bei verschiedenen Impurity-Modellen mit endlicher Reichweite ( $\lambda = 0\ell, 0.5\ell$  und  $1\ell$ ) im Mittel eine statische Leitfähigkeit von  $\sigma_{xx}^c = (0.53 \pm 0.05) e^2/h$ . Diese Rechnungen unterstützen damit die Vermutung, daß die Potentialkorrelationslänge (relativ zur magnetischen Länge) eine irrelevante Längenskala darstellen sollte.

Der Bereich, in dem *universelles* Verhalten der statischen Leitfähigkeit *nachgewiesen* ist, konnte hier nun um einen Faktor Zwei in der Reichweite, bei wesentlich größerer Genauigkeit, erweitert werden.

Da die diagonale Leitfähigkeit offensichtlich nicht wie die Hall-Leitfähigkeit den Vorzug hat, stabil bezüglich von Inhomogenitäten oder anderen möglichen Einflüssen zu sein, gibt es kaum präzise Messungen. Bei Experimenten mit Mischkryostaten, die Untersuchungen im mK-Bereich ermöglichen, findet man ein im wesentlichen temperaturunabhängiges Maximum des Leitfähigkeit-Peaks ( $T \approx 50$  mK), während die Breite noch mit der Temperatur skaliert. Die als Beispiel\* ausgewählten genaueren Messungen bei Si-MOSFETs sind gut verträglich mit der Hypothese eines universellen Leitfähigkeitsfixpunktes (universell auch bezüglich des Landau-Niveaus):

---

\*Die Messungen wurden mit dem Lineal an den publizierten Kurven vorgenommen. Die Meßfehler dürften dennoch kaum größer als die der Experimentatoren sein.

$\mu[cm^2/Vs]$	$T[K]$	Peak	$\sigma_{xy}[e^2/h]$	$\sigma_{xx}[e^2/h]$	Ref.
14000	0.10	0 $\uparrow$ +	0.5	0.11	163
”	”	0 $\uparrow$ -	1.5	0.43	”
”	”	0 $\downarrow$ +	2.5	0.51	”
”	”	0 $\downarrow$ -	3.5	0.49	”
”	”	1 $\uparrow$ +	4.5	0.55	”

Aufgrund der Spin-Valley-Aufspaltung gehören hier vier Peaks zum niedrigsten Landau-Niveau.

Ebenso zeigen präzisere Messungen an GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen gute Übereinstimmung mit universellem Verhalten.

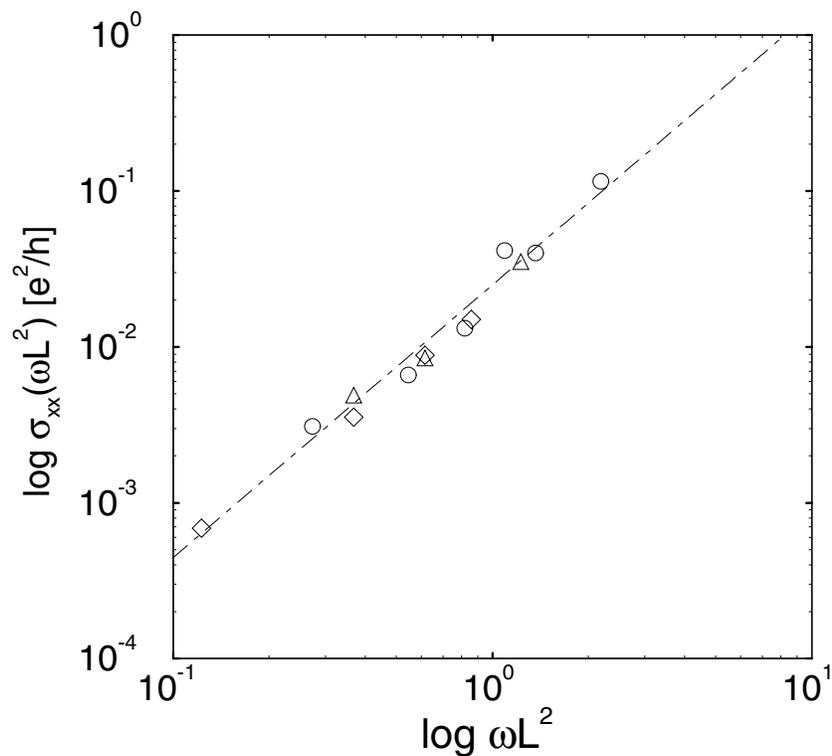
$\mu[cm^2/Vs]$	$T[K]$	Peak	$\sigma_{xy}[e^2/h]$	$\sigma_{xx}[e^2/h]$	Ref.
860000	0.02	4.	?	0.34	133
”	”	5.	?	0.50	”
”	”	6.	?	0.79	”
1200000	0.14	1 $\uparrow$	2.5	0.50	118
1400000	4.2	1.	?	0.53	127
”	”	2.	?	0.48	”
”	”	3.	?	0.46	”

Erst bei tiefsten Temperaturen ( $T \approx 25mK$ ) wird eine Sättigung auch in der Breite des Peaks erreicht. Hier erst konnten die bereits diskutierten<sup>89</sup> Finite-Size-Scaling Experimente (vgl. Abbildung 6.5) zur Bestimmung des Exponenten  $\nu$  durchgeführt werden. Die Peak-Maxima zeigen wie die Breite Sättigungsverhalten mit fallender Temperatur. Man findet auch, daß die Peak-Maxima mit wachsender Systemgröße ansteigen. Leider wurden auch in dieser Hinsicht keine systematischen Untersuchungen durchgeführt. Da die Werte für die Maxima aber selbst bei den größten Hall-Bars (Breite  $L = 64\mu m$ ) mit  $\sigma_{xx} = 0.40 e^2/h$  noch zu weit vom Fixpunkt entfernt sind, ist das postulierte Skalenverhalten mit dem Exponenten  $\eta'$  erst bei größeren Proben nachweisbar. Wie Abbildung 6.5 (rechts) zeigt, werden mit wachsender Probengröße auch niedrigere Temperaturen nötig um eine Sättigung zu erreichen. Die diagonale Leitfähigkeit reagiert äußerst empfindlich auf räumliche Inhomogenitäten in der Ladungsträgerkonzentration. Da selbst schwache Inhomogenitäten der Größenordnung 1 % die Meßergebnisse nicht unerheblich beeinflussen können<sup>91</sup>, dürfte die Präparation größerer Proben schwieriger werden.

Dennoch wäre eine experimentelle Skalenanalyse von großem Interesse, da sie wichtige Aufschlüsse über die Natur des LD-Überganges geben könnte und es erlauben würde die Korrelationsdimension  $D_2$  direkt zu messen.

### 6.4.2.3 Das Skalenverhalten der dynamischen Leitfähigkeit

Die Untersuchung des Skalenverhaltens der dynamischen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(\omega, L)$  bei langreichweitigen Potentialen ( $\lambda = 2\ell$ ) im Limes kleiner Frequenzen  $\omega$  wurde auf die gleiche Weise durchgeführt wie bei den kurzreichweitigen Potentialen. Zum Unterschied ist aber hier die Datenlage wesentlich ungünstiger. Der Rechenaufwand wird größer, da das Skalenverhalten erst bei kleineren Infinitesimalparametern  $\varepsilon$  hinreichend gut beobachtet werden konnte. Auch stand hier nicht mehr so umfangreiches Datenmaterial zur Verfügung.



**Abbildung 6.19:** Doppelt logarithmische Auftragung der dynamischen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(\omega L^2)$  gegen  $\omega L^2$  bei langreichweitigen Potentialen ( $\lambda = 2\ell$ ) und Systemen der Breite  $L = 20$ ,  $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\delta = -0.0104$  ( $\circ$ ),  $L = 30$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\delta = -0.0276$  ( $\triangle$ ), und  $L = 30$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\delta = -0.00287$  ( $\diamond$ ). Die gestrichelte Linie zeigt das Potenzgesetz mit dem Exponenten  $\eta'' = 1.75 \pm 0.1$  aus der Regression.

Es wurden Systeme mit folgenden Parametern berechnet:  $L = 20$  mit  $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$ ,  $L = 30$  mit  $\varepsilon = 10^{-5}$ , und  $L = 30$  mit  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Abbildung 6.19 zeigt die dynamische Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(\omega L^2)$  in doppelt logarithmischer Auftragung. Als Funktion des Skalenparameters  $\omega L^2$  fallen auch hier bei genügend

kleinen Werten die Kurven für Systeme verschiedener Größe auf eine einzige Skalenfunktion.

Für den Exponenten  $\eta''$  ergibt sich hier die Abschätzung  $1.75 \pm 0.1$ , beziehungsweise  $\eta = 0.5 \pm 0.2$  für den Exponenten der anomalen Diffusion. Da der Effekt von  $\varepsilon$  (wenn der Wert zu groß gewählt wurde) zu einer systematischen Unterschätzung von  $\eta''$  führt, muß  $\eta = 0.5 \pm 0.2$  als obere Grenze gelten. Dieses Ergebnis ist verträglich mit dem Wert bei kurzer Reichweite  $\eta = 0.37 \pm 0.03$ . Deshalb kann aufgrund der Datenlage nicht geschlossen werden, ob  $\eta$  bzw.  $D_2$  ebenfalls universell bezüglich der Potential-Korrelationslänge ist.

# 7

## Modellrechnungen zum zweidimensionalen Magnetotransport mittels der streutheoretischen Methode

In diesem Abschnitt werden „Experimente“ mit der streutheoretischen Methode<sup>168</sup> zur Berechnung der Wellenfunktionen dargestellt. Die auf die vorgestellte Art und Weise durchgeführten Rechnungen erfordern eine Matrix-Inversion und sind deshalb im Aufwand mit einer vollständigen Diagonalisierung zu vergleichen. Die Resultate können deshalb in ihrer Genauigkeit, aufgrund der Beschränkung in den Systemgrößen, nicht mit den Ergebnissen von iterativen Verfahren konkurrieren. Dennoch sind die erzielten Resultate gut verträglich mit den Präzisionsergebnissen aus den vorigen Abschnitten. Nicht zuletzt können die Berechnungen zur Leitfähigkeit und zum Hall-Winkel gleichzeitig auch illustrativ dargestellt werden.

### 7.1 Die streutheoretische Methode

Das ungestörte System wird durch den Einteilchen-Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^0 &= \frac{\boldsymbol{\Pi}^2}{2m} + q\Phi, \\ \boldsymbol{\Pi} &= \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = B \begin{pmatrix} 0 \\ x - g \end{pmatrix}, \\ \Phi &= Ex, \quad q = -e \quad \text{mit} \quad E, B, \epsilon > 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

beschrieben. Durch den Parameter  $g$  kann zusätzlich ein konstantes Eichfeld eingeführt werden. Die Lösungen der Schrödingergleichung

$$(\mathbf{H}^0 - \epsilon_{np}^0)\Psi_{np}^0 = 0 \quad (7.2)$$

sind die um den Ort

$$x_p = g - \frac{\ell^2}{\hbar}p + \frac{v_D}{\omega_c} \quad (7.3)$$

zentrierten „Spaghetti“-Zustände

$$\begin{aligned} \Psi_{np}^0(x, y) &= (\sqrt{\pi}2^n n! \ell L_y)^{-\frac{1}{2}} e^{ipy/\hbar} e^{-\frac{(x-x_p)^2}{2\ell^2}} H_n\left(\frac{x-x_p}{\ell}\right) \\ \epsilon_{np} &= \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) - eEx_p + \frac{m}{2}v_D^2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Dabei bezeichnet  $v_D = cE/B$  die Driftgeschwindigkeit und  $\omega_c = eB/mc$  die Zyklotronfrequenz. Bei Anwesenheit eines Impurity-Potentials  $V(\mathbf{r})$  werden die einlaufenden Wellenfunktionen räumlich verbreitert. Die stromtragenden Zustände, die Streuzustände  $|np+\rangle$ , sind Lösungen der Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$|np+\rangle = |np\rangle + G_0^+ V |np+\rangle \quad (7.5)$$

wobei

$$G_0^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon_{np}) = \sum_{mk} \frac{\langle \mathbf{r} | mk \rangle \langle mk | \mathbf{r}' \rangle}{\epsilon_{np} - \epsilon_{mk} + i\epsilon} \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}^0 |np+\rangle = \epsilon_{np} |np+\rangle \quad (7.6)$$

die retardierte Green-Funktion für das ungestörte Problem ist. Für unseren Hamilton-Operator  $H^0$  kann sie in geschlossener Form angegeben werden<sup>168</sup>.

Die retardierte (avancierte) Green-Funktion für das unterste Landauband, ausgedrückt mit Hilfe der Faddeeva-Funktion  $w(z)$ , lautet:

$$G_0^\pm(z, z'; \omega) = \mp \frac{i}{2\sqrt{\pi}\omega_o} e^{\left(\frac{z+z'^*}{2}\right)^2} e^{-\frac{Re^2 z + Re^2 z'}{2}} w\left(\mp \frac{z + z'^*}{2} \pm \frac{\omega_g - \omega}{\omega_o}\right) \quad (7.7)$$

wobei die komplexen Koordinaten

$$z = \xi + i\eta, \quad \text{mit} \quad \xi = (g - x + v_D/\omega_c)/\ell, \quad \eta = y/\ell \quad (7.8)$$

und die Abkürzungen

$$\omega_g = \omega_c/2 + (\epsilon E g - m v_D^2/2)/\hbar, \quad \omega_o = v_D/\ell \quad (7.9)$$

verwendet werden. Der Zusammenhang von  $w(z)$  mit der komplexen, komplementären Fehlerfunktion lautet

$$w(z) = e^{-z^2} \operatorname{erfc}(-iz). \quad (7.10)$$

Im limes  $E \rightarrow 0$  erhält man

$$G_0^+(z, z'; \omega) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\omega_c/2 - \omega} e^{\left(\frac{z+z'^*}{2}\right)^2} e^{-\frac{Re^2 z + Re^2 z'}{2}}. \quad (7.11)$$

Da hier numerische Effizienz und auch Genauigkeit eine große Rolle spielen, muß  $w(z)$  *direkt* berechnet werden. Numerisch effizient geschieht dies zum Beispiel mit Hilfe des Standard-Bibliotheks-Algorithmus von W. Gautschi<sup>53</sup> oder mit einer noch schnelleren Methode nach F. Matta<sup>117</sup>. Letztere wurde nach eigener Implementierung in allen numerischen Rechnungen verwendet.

Bei einem Impurity-Potential der Form

$$V(\mathbf{r}) = \sum_i V_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (7.12)$$

reduziert sich die Integralgleichung

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi^0(\mathbf{r}) + \frac{1}{\hbar} \int d\mathbf{r}' G_0^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}') \quad (7.13)$$

auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Der Eichparameter kann zur Verbesserung der Kondition der Matrix herangezogen werden. Die Wahl  $g = -v_D/\omega_c$  erwies sich als eine (wenn auch kleine) Verbesserung.

## 7.2 Das Random-Potential

Es ist in der numerischen Simulation zweckmäßig das Random-Potential durch eine Überlagerung von Gauß-Funktionen zu realisieren. Die Reichweite der Korrelationen im Potential kann dadurch leicht über die Reichweite bzw. die Konzentration der Streuer kontrolliert werden.

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N V_k e^{-\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_k}{d}\right)^2} \quad (7.14)$$

Die sich daraus ergebende Zustandsdichte im Hochfeld-Fall wurde bereits in Abschnitt 6.2, Gleichung (6.11) angegeben.

Da die Lösung der Integralgleichung (7.13) sich auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems reduziert, wenn man eine Superposition von  $\delta$ -Streuern als Potential einsetzt, wurde das folgende Modell für ein Potential mit langreichweitigen Korrelationen verwendet:

Die Zentren der Streuer werden auf ein Gitter mit der Gitterkonstante von einem Zyklotronradius gesetzt. Die Amplituden  $V_i$  werden im Intervall  $[-V, V]$  ausgewürfelt und das Zufallspotential wird als Superposition von Gauß-Funktionen der Reichweite  $d$  gemäß (7.14) konstruiert. Anschließend werden die Gewichte der  $\delta$ -Funktionen in Gleichung (7.12) proportional zur Amplitude des Zufallspotentials bei  $\mathbf{r}_i$  gewählt. Die „Abtastung“ wird dabei auf einem Gitter mit der Gitterkonstanten  $a$  vorgenommen.

Im Fall  $a > \ell$  wird die einlaufende Welle kaum durch das Störpotential aufgeweitet, bei  $a \lesssim \ell$  dagegen füllt die Wellenfunktion den Bereich des Störpotentials vollständig aus (siehe folgende Abbildungen). Im folgenden Abschnitt wird mit Hilfe der multifraktalen Analyse der Wellenfunktion gezeigt, daß die mittels der streutheoretischen Methode und mit diesem Impurity-Modellpotential ( $a \lesssim \ell$ ) berechneten Wellenfunktionen alle aus anderen numerischen Rechnungen bekannten Eigenschaften<sup>71, 73, 136, 131</sup> haben. Wie sich zeigt, ist es völlig ausreichend, wenn für das Diskretisierungsgitter  $a = 1\ell$  gewählt wird. Für kleinere Werte von  $a$  konnte kein Unterschied mehr in den Resultaten festgestellt werden.

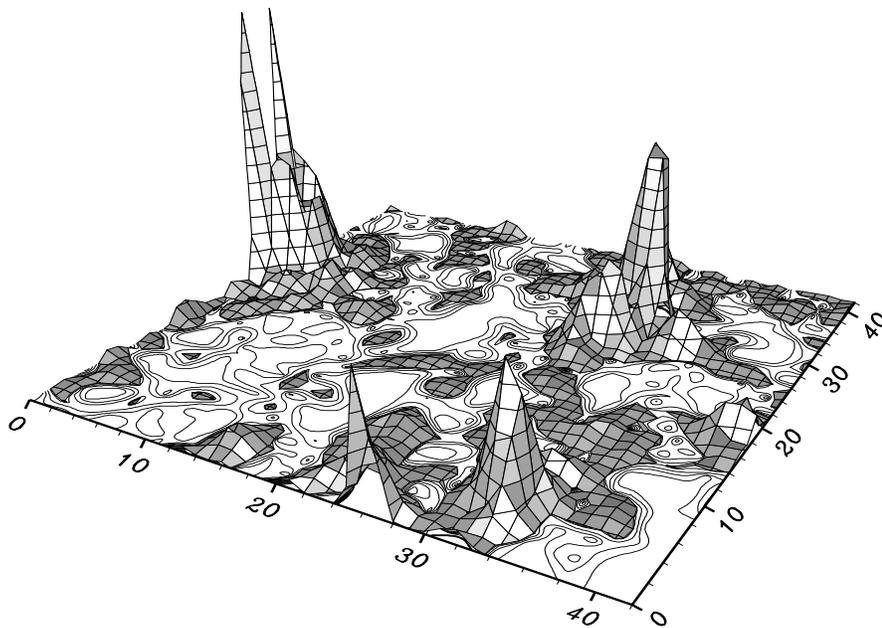
Die Wellenfunktion erreicht bereits zwei bis drei Zyklotronradien außerhalb der Streuregion wieder ihre asymptotische Form (7.4), siehe Abbildungen 7.7 und 7.8. Um die Wellenfunktion in ihrem aufgeweiteten Zustand innerhalb des Streupotentials „einzufrieren“, wurde auch mit der Anbringung eines „Wellblech-Potentials“ am oberen Ende der Probe experimentiert. Diese wurde konstruiert, indem die Amplitudenverteilung der Impurities am oberen Rand noch einige Larmor-Längen (typischerweise etwa  $5\ell - 10\ell$ ) fortgesetzt wurde (Abbildungen 7.7 links und 7.8).

In Abbildung 7.1 ist das Betragsquadrat einer stationären Wellenfunktion ( $43\ell \times 43\ell$ ) im Potential der Reichweite  $d = 0$  bei schwachem elektrischen Feld  $E = 0.001$  dreidimensional abgebildet. Um auch die Strukturen auf kleiner Skala zu zeigen, wurden Amplituden kleiner als  $10^{-5}$  relativ zum Maximalwert von  $|\Psi|^2$  durch Höhenlinien eingezeichnet. Der fraktale Charakter der Wellenfunktion am LD-Übergang wird noch deutlicher,

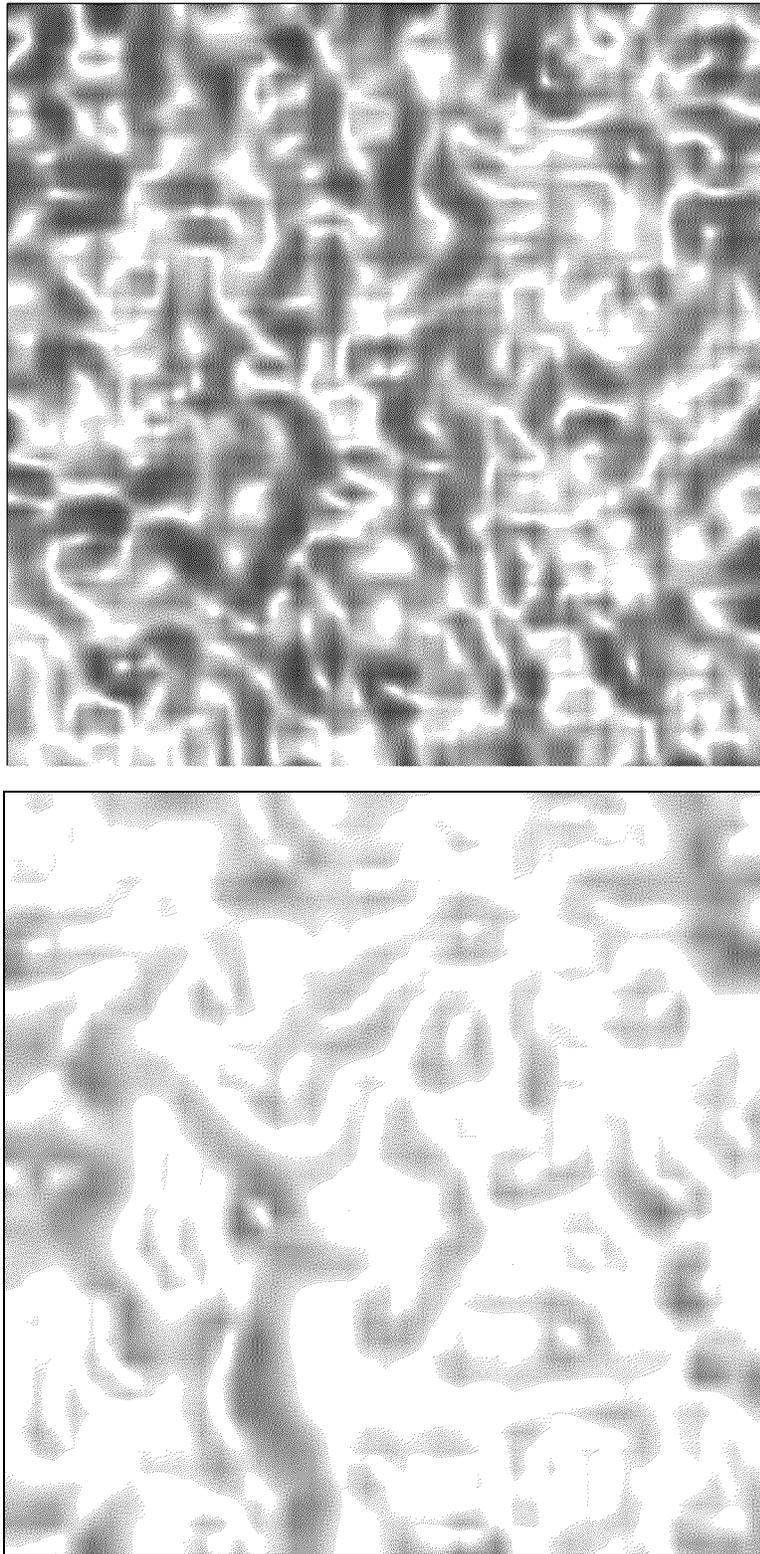
wenn zur Hervorhebung der Strukturen auf kleinen Größenskalen der Logarithmus der Wellenfunktion dargestellt wird (Abbildung 7.2). Die filamentartigen Strukturen treten plastisch hervor, wenn zur Darstellung ein Beleuchtungsmodell benutzt wird: Durch einen simulierten, flachen Lichteinfall auf die Wellenfunktion „glänzen“ die Maxima von  $\log |\Psi|^2$ .

Wie die Abbildung 7.3 zeigt, kann mit einer Gitterkonstanten von  $a = \ell$  und langer Potentialreichweite  $d \gtrsim 1.5\ell$  auch das im Hochfeld-Fall typische Verhalten der Wellenfunktionen beobachtet werden: Die Wellenfunktion ( $43\ell \times 43\ell$ ) in Abbildung 7.3 ist bei einer Reichweite von  $d = 1.5\ell$  bereits gut auf den Äquipotentiallinien konzentriert. Das Elektron tritt am unteren Ende in das Impurity-Potential ein und am oberen Ende wieder aus. Das Betragsquadrat der Wellenfunktion wurde in der Darstellung linear auf die Schwärzungsdichte abgebildet und auf die Äquipotentiallinien des Streupotentials projiziert.

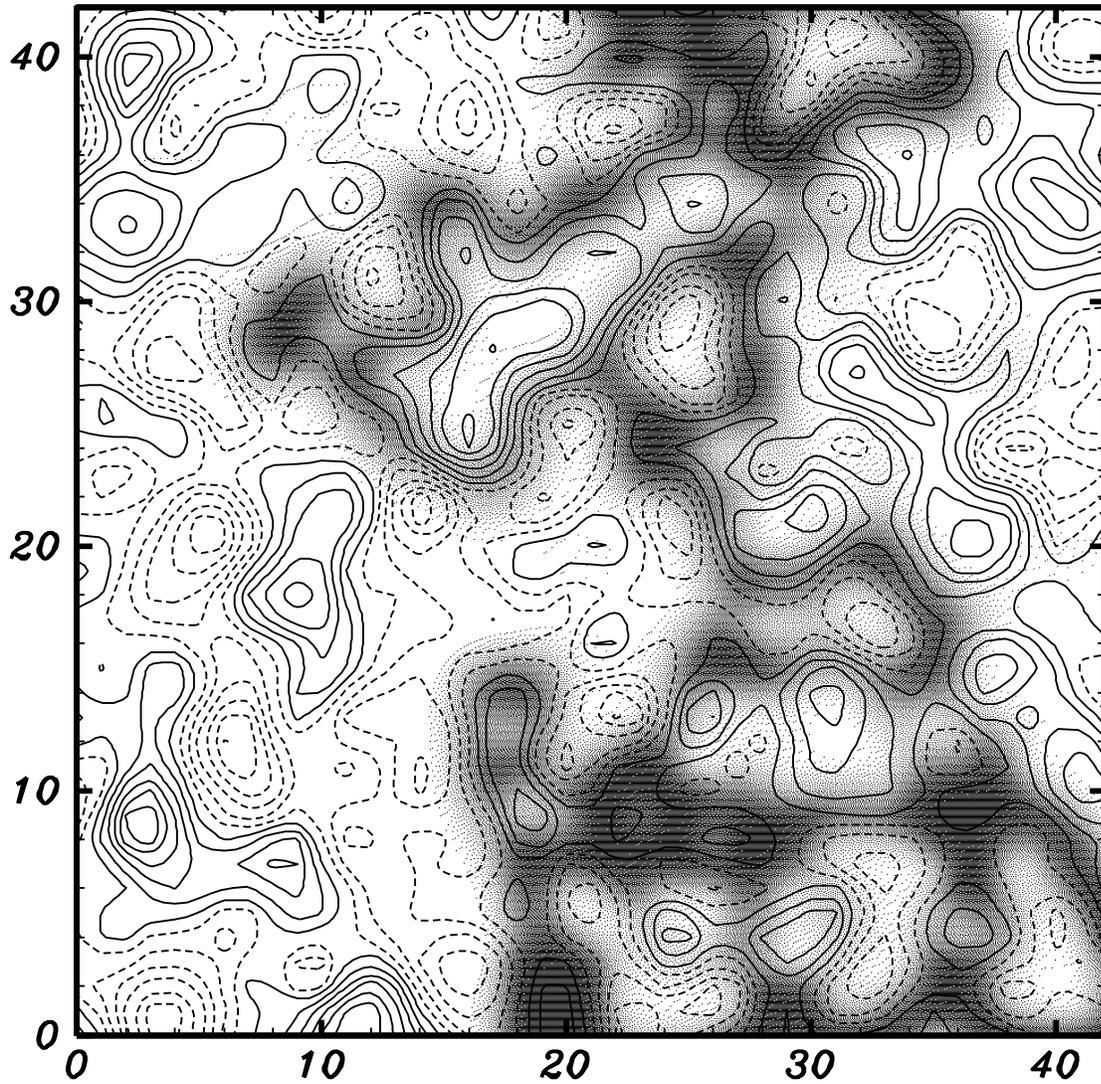
Interessant ist hier die Möglichkeit, das Zusammenspiel zwischen dem elektrischen Feld und dem Zufallspotential zu untersuchen. Die Wellenfunktion kann sich wegen der Energieerhaltung nur innerhalb eines Streifens der Breite  $L_E \approx \Gamma/\epsilon E$  ausbreiten, d. h. innerhalb jenes Streifens, über den sich das elektrische Potential nicht um wesentlich mehr als die Varianz  $\Gamma$  des Zufallspotentials ändert. Die Stärke des elektrischen Feldes  $E$  wird im folgenden immer in Einheiten von  $V/\ell\epsilon$  angegeben. Den Zusammenhang zwischen  $V$  und  $\Gamma$  erhält man aus der Gleichung (6.12).



**Abbildung 7.1:**  $|\Psi|^2$  in einem Potential der Reichweite  $d = 0$  bei elektrischem Feld  $E = 0.001$  ( $43\ell \times 43\ell$ ). Um auch die Strukturen auf kleiner Skala zu zeigen wurden Amplituden kleiner als  $10^{-5}$  relativ zum Maximalwert von  $|\Psi|^2$  durch Höhenlinien dargestellt.



**Abbildung 7.2:** Logarithmische Darstellung ( $\log |\Psi|^2$ ) der Wellenfunktion aus Abbildung 7.1 (*oben*) und Abbildung 7.3 (*unten*). Die filamentartigen Strukturen werden durch einen simulierten, flachen Lichteinfall sichtbar gemacht.



**Abbildung 7.3:** Stationäre Wellenfunktion mit Energie in der Bandmitte für ein Potential der Reichweite  $d = 1.5\ell$  bei schwachem elektrischen Feld,  $E = 0.01$  ( $43\ell \times 43\ell$ ). Die Schwärzungsdichte ist proportional zu  $|\Psi|^2$ . Äquipotentiallinien unterhalb der Bandmitte (Seen) sind gestrichelt, Berge sind durchgezogen eingezeichnet. Die niedrigste durchgezogene Höhenlinie liegt auf der Perkolationschwelle.

## 7.3 Multifraktale Analyse der Wellenfunktionen

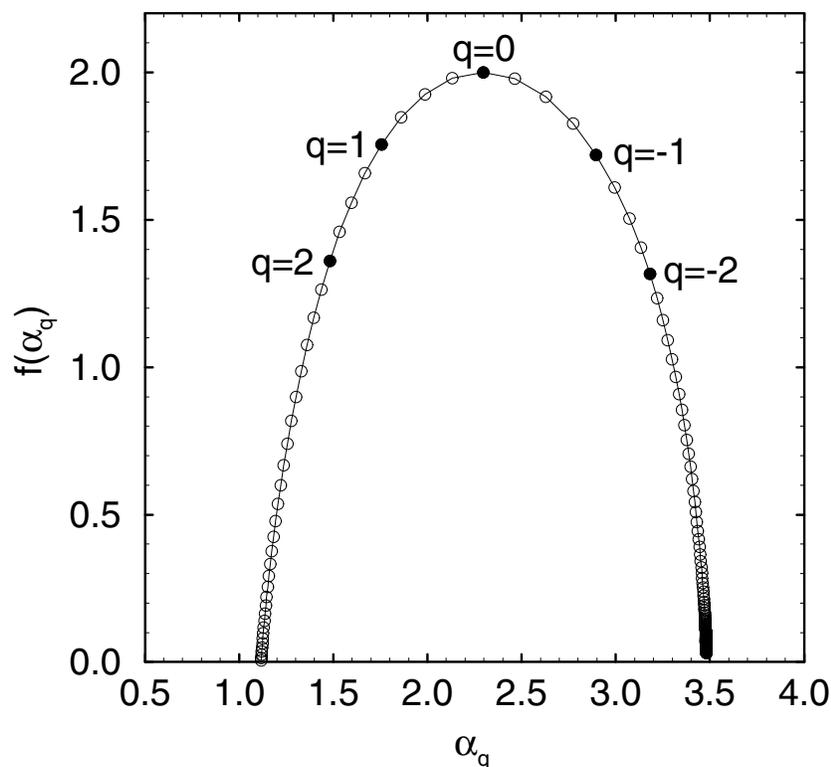
Die  $f(\alpha_q)$ -Spektren wurden mittels der bereits beschriebenen Methode nach A. Chhabra und R. V. Jensen, d. h. mit Hilfe der Gleichungen (5.18-5.20), gewonnen. Die verallgemeinerten Dimensionen und Korrelationsexponenten können daraus einfach mit den Gleichungen (5.16, 5.17a) berechnet werden.

Es wurden dazu mehrere Systeme der Größen  $33\ell \times 33\ell$  und  $43\ell \times 43\ell$  bei Potentialreichweiten von  $d = 0$  bis zu  $d = 1.8\ell$  untersucht. In allen Fällen wurde ein sehr kleines elektrisches Feld ( $E < 0.001$ ) gewählt. In Abbildung 7.4 ist ein typisches Resultat für ein multifraktales Spektrum gezeigt. Das Maximum der  $f$ - $\alpha$ -Kurve liegt bei  $\alpha_0 = 2.30 \pm 0.05$  und ist durch die Dimension des Einbettungsraumes  $D_0 = 2.00 \pm 0.05$  gegeben. Die numerischen Resultate für die Grenzdimensionen sind  $\alpha_{\min} = D_\infty = 1.1 \pm 0.1$  und  $\alpha_{\max} = D_{-\infty} = 3.5 \pm 0.2$ .

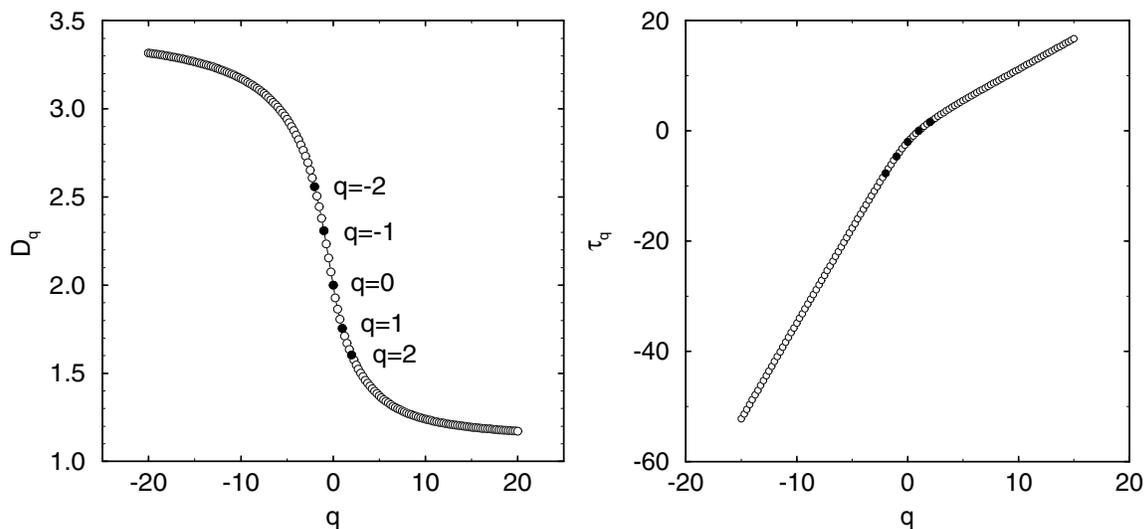
Die beobachtete geringfügige Verschmälerung der  $f(\alpha_q)$ -Spektren,  $\alpha_{\min} \approx 1.1 \dots 1.2$  bzw.  $\alpha_{\max} \approx 3.5 \dots 3.3$ , bei wachsender Reichweite  $d$  im Bereich von  $0.8\ell$  bis zu  $1.8\ell$  ist vermutlich auch auf zu geringe Systemgrößen zurückzuführen und liegt noch im Bereich der Fehlergrenzen. Bei kürzerer Reichweite  $d \approx 0$  erhält man typischerweise etwa  $\alpha_{\min} = 1 \pm 0.1$  bzw.  $\alpha_{\max} = 3.6 \pm 0.2$ . Ein systematischer Einfluß der Variation der Reichweite auf das multifraktales Spektrum kann deshalb im Rahmen der angegebenen Genauigkeit nicht mit Sicherheit beobachtet werden.

Aus der Korrelationsdimension  $D_2 = 1.6 \pm 0.1$  folgt für den Exponenten  $\eta$  der anomalen Diffusion  $\eta = 2 - D_2 = 0.4 \pm 0.1$ . Dieser stimmt damit gut mit den bekannten Resultaten<sup>39</sup>, sowie den in den Abschnitten 6.3 und 6.4 gewonnenen Ergebnissen überein. Auch hier ist im Rahmen der Fehlerschranken  $\pm 0.1$  kein signifikanter Unterschied bei verschiedenen Reichweiten im Bereich  $0\ell$  bis  $1.8\ell$  feststellbar.

Die  $f$ - $\alpha$ -Kurven und die zuvor angegebenen Werte der fraktalen Dimensionen für unser System mit korrelierter Randomness sind damit in guter Übereinstimmung mit den Werten, die man für ein Tight-Binding-Gittermodell<sup>71</sup> mit Random-Site-Energien oder ein Kontinuumsmodell<sup>136</sup> mit einer hohen Dichte von  $\delta$ -förmigen Streuzentren erhält. Die quantitative Übereinstimmung der multifraktalen Spektren kann als sicheres Indiz dafür gewertet werden, daß die streutheoretische Methode zur Berechnung von Wellenfunktionen, zusammen mit dem beschriebenen Impurity-Modell von korrelierten  $\delta$ -Streuern, geeignet ist, die Magnetotransporteigenschaften und den LD-Übergang zu beschreiben. Die streutheoretische Methode ist also eine nützliche Alternative zu den üblicherweise verwendeten Diagonalisierungsmethoden.



**Abbildung 7.4:** Das  $f(\alpha_q)$ -Spektrum für eine  $33\ell \times 33\ell$  Probe mit einem Potential endlicher Reichweite  $d = 0.8\ell$ , schwachem elektrischen Feld  $E = 0.001$  und Stützstellenabstand  $a = 0.75\ell$  bei der kritischen Energie in der Bandmitte. Es ist  $\alpha_0 = 2.30 \pm 0.05$ ,  $\alpha_{\min} = D_\infty = 1.1 \pm 0.1$  und  $\alpha_{\max} = D_{-\infty} = 3.5 \pm 0.2$



**Abbildung 7.5:** Links: Das Spektrum der verallgemeinerten Dimensionen  $D_q$  für die Probe aus der vorherigen Abbildung 7.4. Einige Werte:  $D_{-2} = 2.56 \pm 0.1$ ,  $D_{-1} = 2.31 \pm 0.1$ ,  $D_0 = 2.00 \pm 0.05$ ,  $D_1 = 1.76 \pm 0.1$ ,  $D_2 = 1.60 \pm 0.1$ . Rechts: Die dazugehörigen Korrelationsexponenten  $\tau_q$ .

## 7.4 Die Statische Leitfähigkeit

Die Leitfähigkeit kann mit Hilfe der Einstein-Relation durch die Diffusionskonstante ausgedrückt werden:

$$\sigma_{xx}(\varepsilon_F) = e^2 \rho(\varepsilon_F) D(\varepsilon_F). \quad (7.15)$$

Diese wird durch das zeitliche Auseinanderlaufen eines Wellenpaketes im Streupotential bestimmt:

$$D = \frac{\langle \mathbf{r}^2 \rangle}{t}, \quad \langle \mathbf{r}^2 \rangle(t) = \int d^2r r^2 |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (7.16)$$

Da hier allerdings ein stationäres Problem behandelt wird, muß eine Abschätzung für das zeitliche Verhalten von  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle(t)$  vorgenommen werden. Betrachtet man die Abbildungen 7.7 und 7.8, liegt die Annahme nahe, daß das zeitliche Auseinanderlaufen eines Wellenpaketes hier mit der Aufweitung der einlaufenden ebenen Welle mit zunehmender Eindringtiefe in das Störpotential ( $y$ -Richtung) beschrieben werden kann.

Wie sich zeigt, reagiert diese Aufweitung  $\langle \mathbf{x}^2 \rangle(y)$  extrem empfindlich auf das angelegte elektrische Feld (d. h. Feldenergien  $eE\ell$  von wenigen Prozenten von  $\Gamma$ ). Da für die Bestimmung der Gleichstromleitfähigkeit der Limes kleiner Felder relevant ist, muß diese Abhängigkeit systematisch untersucht werden.

Zur Bestimmung der Diffusionskonstanten wird angenommen, daß das Elektron im Streupotential eine typische, von der Eindringtiefe  $y$  unabhängige, mittlere Geschwindigkeit  $\langle v_y \rangle$  in  $y$ -Richtung besitzt, also

$$D = \frac{\langle \mathbf{r}^2 \rangle(t)}{t} \approx \frac{\langle \mathbf{x}^2 \rangle(y)}{y} \langle v_y \rangle \quad (7.17)$$

Bei der Berechnung von  $\langle \mathbf{x}^2 \rangle(y)$  wurde die Varianz  $\int dx x^2 |\Psi(x, y_i)|^2$  jeweils auf in  $x$ -Richtung liegenden Streifen für alle  $y_i$  auf dem Gitter bestimmt.

Die mittlere Geschwindigkeit  $\langle v_y \rangle$  im Streupotential ist gegenüber der Driftgeschwindigkeit  $v_D$  im störstellenfreien Raum erhöht. Zur Abschätzung von  $\langle v_y \rangle$  betrachte man die folgende Auftragung des in  $x$ -Richtung aufintegrierten Betragsquadrates der Wellenfunktion. In der numerischen Rechnung findet man eine konstante Aufenthaltswahrscheinlichkeit in den Streifen parallel zur  $x$ -Richtung:

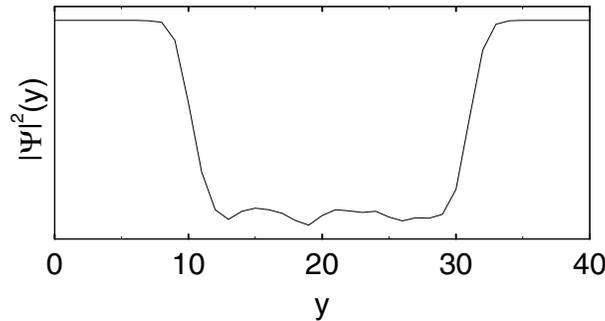
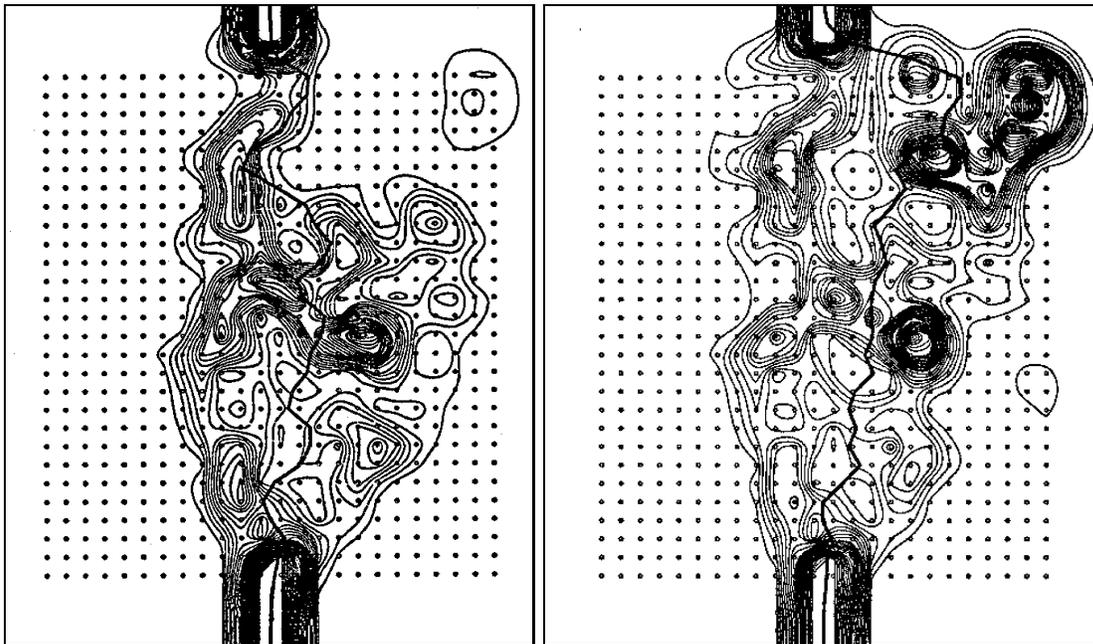
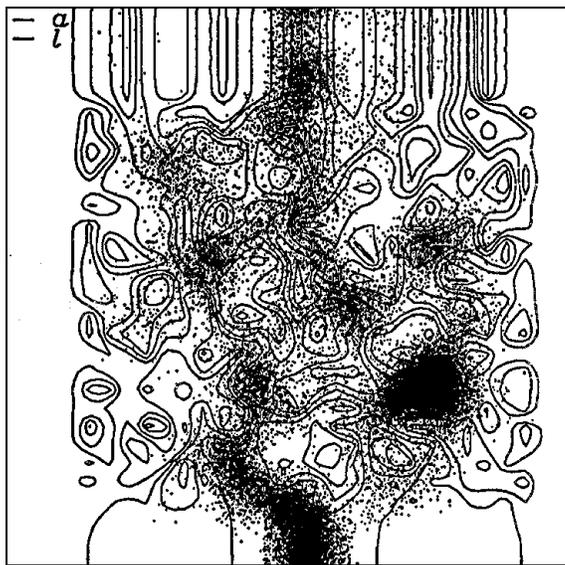


Abbildung 7.6: Aufenthaltswahrscheinlichkeit in Streifen parallel zur  $x$ -Richtung.

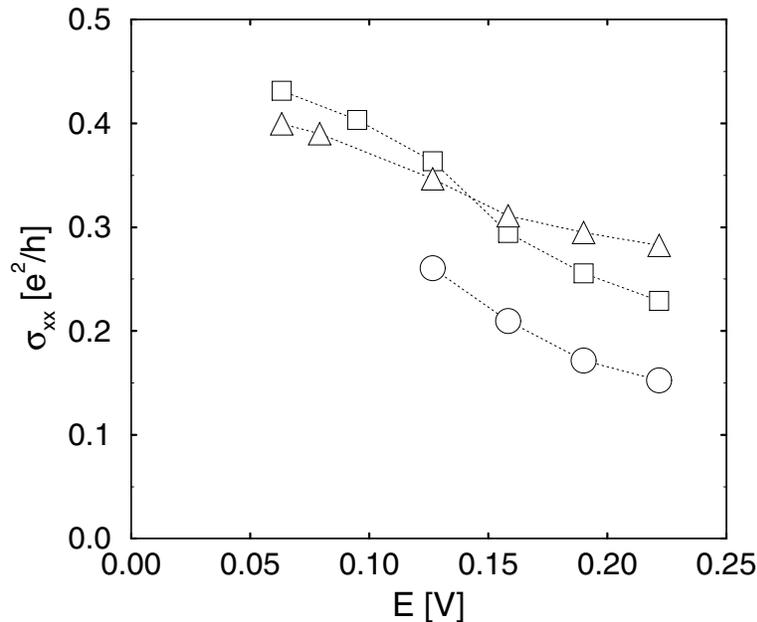


**Abbildung 7.7:** Stationäre Wellenfunktion im Potential der Reichweite  $d = 0$  bei schwachem elektrischen Feld  $E = 0.01$ . Die  $\delta$ -Streuer liegen auf dem durch Punkte markierten Gitter ( $a = \ell$ ). Die Energie ist um  $\varepsilon = 0.003$  (*links*) bzw.  $\varepsilon = 0.001$  (*rechts*) gegenüber der Perkolationschwelle in der Bandmitte ( $E = 0$ ) erhöht. Im linken Bild ist am oberen Ende ein Wellblech-Potential mit einer Breite von  $8\ell$  angebracht.  $|\Psi|^2$  ist in Form von Konturlinien eingezeichnet. Der Schwerpunkt von  $|\Psi|^2$  ist als dicke Linie hervorgehoben.



**Abbildung 7.8:** Stationäre Wellenfunktion mit Energie in der Bandmitte bei einem Potential der Reichweite  $d = 0.5\ell$ . Das Streupotential ist durch Äquipotentiallinien dargestellt. Die Punktdichte ist proportional zu  $|\Psi|^2$ .

Da die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in einem Streifen bei  $y_i$  zu finden, umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit ist, mit der dieser durchquert wird, kann aus dem Verhältnis der beiden Aufenthaltswahrscheinlichkeiten („Plateaus“ in Abbildung 7.6) die mittlere Geschwindigkeit im Streupotential abgeschätzt werden.



**Abbildung 7.9:** Die statische Leitfähigkeit als „Funktion“ des elektrischen Feldes bei den Potentialreichweiten  $d = 0$  ( $\circ$ ),  $d = 0.57l$  ( $\square$ ) und  $d = 0.70l$  ( $\triangle$ ).

Die numerischen Rechnungen wurden für Systeme der Dimension  $30l \times 20l$  für Potentialreichweiten von  $d = 0$ ,  $d = 0.57l$  und  $d = 0.70l$  durchgeführt. Bei jedem Wert des elektrischen Feldes wurde  $\langle x^2 \rangle(y)$  und die mittlere Geschwindigkeit  $\langle v_y \rangle$  aus der Mittelung über 40 Systeme gewonnen. Die zur Bestimmung der Leitfähigkeit noch benötigte Zustandsdichte kann durch die bekannten analytischen Resultate abgeschätzt werden. Die auf diese Weise bestimmten Werte für  $\sigma_{xx}$  sind als Funktion des elektrischen Feldes und der Potentialreichweite in Abbildung 7.9 dargestellt. Hier ist deutlich die Sättigung der Werte mit abnehmendem elektrischem Feld zu beobachten. Allerdings ist dabei zu berücksichtigen, daß mit kleiner werdendem Feld der Einfluß durch die endliche Probenbreite stärker wird. Diese kann aber aufgrund des limitierten Speichers nicht beliebig erhöht werden. Die angegebenen Werte sind also deswegen wahrscheinlich systematisch unterschätzt.

Mit der SCBA-Zustandsdichte<sup>8</sup> erhält man so folgende Abschätzungen für die statische Leitfähigkeit:

$d = 0$	$\sigma_{xx} = 0.35 \frac{e^2}{h}$
$d = 0.57\ell$	$\sigma_{xx} = 0.43 \frac{e^2}{h}$
$d = 0.70\ell$	$\sigma_{xx} = 0.41 \frac{e^2}{h}$

Diese sind in Anbetracht der begrenzten Systemgrößen und der gemachten Näherungen in guter Übereinstimmung mit den Präzisionsdaten aus den vorigen Abschnitten.

## 7.5 Der Hall-Winkel

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Fermienergie immer im Zentrum des Landau-Bandes bei der kritischen Energie gewählt. Nun wird die Abhängigkeit der Wellenfunktionen vom energetischen Abstand von der Perkolationschwelle untersucht.

Der Schwerpunkt der Wellenfunktion driftet innerhalb des Streupotentials von seinem asymptotischen Wert ab, wenn die Energie der einlaufenden Welle um einen Betrag  $\varepsilon$  vom Zentrum des Landau-Bandes abweicht. (Zahlenwerte für  $\varepsilon$  sind in Einheiten von  $V$  angegeben.) Die beiden Abbildungen 7.7 wurden ausgewählt, um den Effekt klar sichtbar zu machen. Typischerweise ist er nicht so deutlich zu sehen. Um ein signifikantes Resultat zu erhalten, wurde bei 400 Proben der Ausdehnung  $35\ell \times 21\ell$  der Schwerpunkt der Wellenfunktion in Streifen parallel zur  $x$ -Richtung berechnet und darüber gemittelt. Das Resultat ist in Abbildung 7.10 dargestellt.

In einer streutheoretischen Formulierung des Problems von W. Brenig und K. I. Wysokiński<sup>26</sup> ist gezeigt worden, daß die mittlere Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung  $v_p^x$  und die mittlere Geschwindigkeit in  $y$ -Richtung  $v_p^y$  miteinander über die S-Matrix verknüpft werden können:

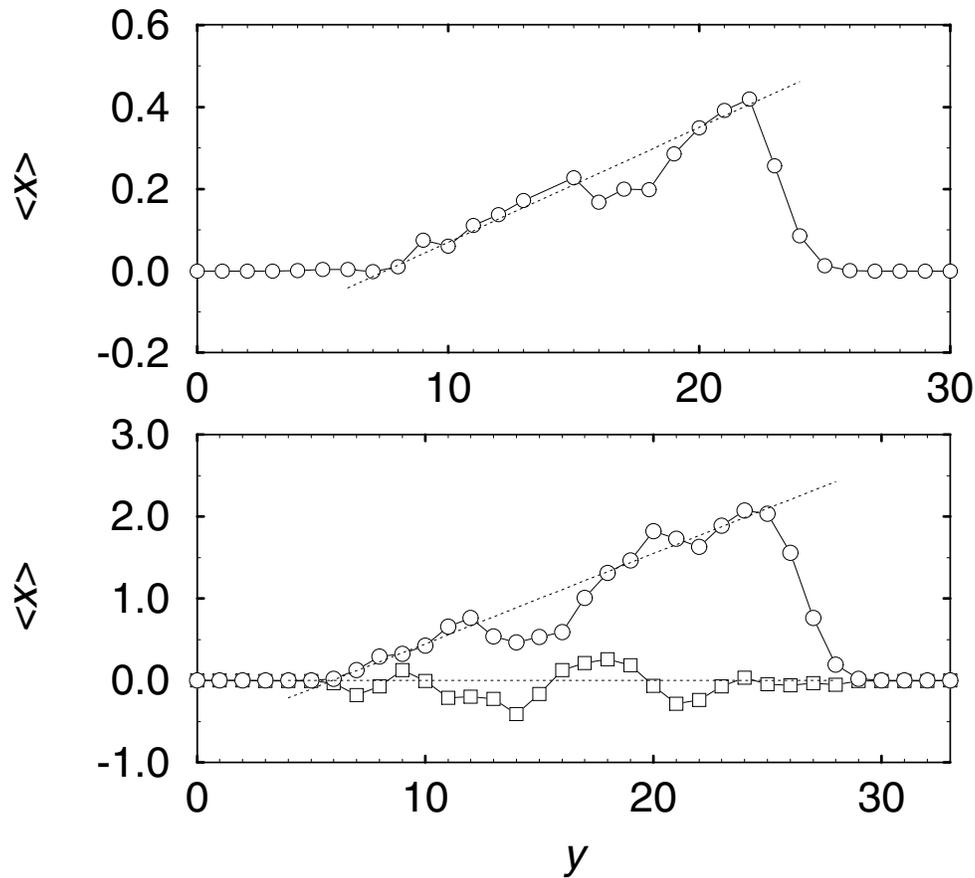
$$v_p^x = \sum_q |S_{pq}|^2 v_q^y (x_p - x_q) / L_y. \quad (7.18)$$

Dabei bezeichnet  $p$  die Impulsquantenzahl der Wellenfunktion  $\Psi_p^0(x, y)$  in Gleichung (7.4). Die rechte Seite dieses Ausdruckes ist, vereinfachend ausgedrückt, im Mittel proportional zur mittleren Geschwindigkeit in  $y$ -Richtung und einer mittleren Drift  $\Delta x_p$  des Schwerpunktes in  $x$ -Richtung:

$$\langle v^x \rangle = \langle v^y \rangle \Delta x_p / L_y \quad (7.19)$$

Der beobachtete Winkel  $\tan\Theta = \langle \Delta x_p \rangle / L_y$  in Abbildung 7.10 ist also im wesentlichen proportional zum Verhältnis der Ströme in  $x$ - und  $y$ -Richtung und damit zum Hall-Winkel  $\tan\Theta_H = \sigma_{xx} / \sigma_{xy}$ .

Genaue quantitative Aussagen über Leitfähigkeit und Hall-Winkel konnten mit der vorgestellten streutheoretischen Methode zur Berechnung der Wellenfunktionen allerdings nicht gemacht werden, da die Wellenfunktionen hier nicht iterativ (ohne Verwendung der Transfermatrix-Methode) berechnet wurden. Die für die Untersuchung



**Abbildung 7.10:** Drift des Schwerpunktes der Wellenfunktion im Random-Potential (Einheit ist  $1\ell$ ). *Oben:* Reichweite  $d = 1\ell$ , 75 % Besetzung des Gitters mit Streuern, elektrisches Feld  $E = 0.01$  und  $\varepsilon = 0.003$  *Unten:* Reichweite  $d = 0.85\ell$ , elektrisches Feld  $E = 0.01$  und  $\varepsilon = 0.003$  ( $\circ$ ) bzw.  $\varepsilon = 0$  ( $\square$ ). In beiden Fällen ist am oberen Ende ein kurzes Wellblech-Potential von  $3\ell$  angebracht.

des LD-Überganges nötigen „mesoskopisch“ großen Systeme, die zur Beobachtung des kritischen Skalenverhaltens nötig werden, sind hier nicht erreichbar. Weitere Rechnungen wurden deshalb mit dieser Methode nicht mehr durchgeführt. Das hier in diesem Kapitel dargestellte Material erschien mir dennoch für Verständnis und Anschauung des Problems interessant genug, da hier Größen wie Leitfähigkeit oder Hall-Winkel buchstäblich illustriert werden können. Wenn die Streuwellenfunktionen effizienter, d. h. unter Vermeidung des Speicherproblems, berechnet würden, könnte die Idee, den Hall-Winkel direkt aus der Drift der Wellenfunktion zu erhalten, ohne  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{xy}$  getrennt berechnen zu müssen, eine interessante Alternative für die Untersuchung des LD-Überganges sein. Dazu müßte freilich auch erst die exakte Gültigkeit einer Relation wie (7.19) nachgewiesen werden.

# 8

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die statische und die dynamische Leitfähigkeit eines zweidimensionalen ungeordneten Systems im starken Magnetfeld, d. h. unter *Quanten-Hall-Bedingungen*, untersucht. Es ist heute allgemein anerkannt, daß das Auftreten des Quanten-Hall-Effekts in einem *Lokalisierungs-Delokalisierungs-Phasenübergang*, der zwischen den Plateaus auftritt, begründet ist. Dieser Übergang ist das Hauptthema der Untersuchung.

Als kritische Größe wird eine experimentell zugängliche Observable, nämlich die dynamische Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(\omega, L)$  studiert. Dazu wurde eine Verallgemeinerung der *Green-Funktions-Rekursionsmethode* entwickelt, die es erlaubt  $\sigma_{xx}(\omega, L)$  bei extrem großen, mesoskopischen Systemen zu berechnen, um diese anschließend mittels einer *Finite-Size-Scaling-Analyse* als Funktion der Systemgröße  $L$  zu untersuchen. Das Impurity-Potential wird im Rahmen des *Random-Matrix-Modells* erzeugt. Dieses erweist sich damit auch in der Berechnung der dynamischen Leitfähigkeit als ein nützliches Konzept zur schnellen Generierung von Zufallspotentialen.

Es wurde erstmals gezeigt, daß beim kritischen Skalenverhalten der *statischen Leitfähigkeit*  $\sigma_{xx}(E, L)$  in der Nähe des *universellen Fixpunktes*  $\sigma_{xx}^c = 0.50 \pm 0.02e^2/h$  nicht nur der Exponent der Korrelationslänge  $\nu = 2.37 \pm 0.05$ , sondern ein *weiterer Skalenindex*  $\eta' = 1.63 \pm 0.03$  eine wichtige Rolle spielt:

$$\sigma_{xx}(E, L) = \sigma_{xx}^c - a_1(L^{\frac{1}{\nu}}(E - E^c))^2 - a_2L^{-\eta'} + \dots$$

Es wird ein Argument dafür gegeben, daß der Exponent  $\eta'$  mit der Korrelationsdimension  $D_2$  identifiziert werden kann. Für den Exponenten der anomalen Diffusion folgt damit  $\eta = 2 - D_2 = 0.37 \pm 0.03$  in guter Übereinstimmung mit bekannten Resultaten.

Die Hypothese eines *universellen Leitfähigkeitsfixpunktes* bei  $\sigma_{xx}^c = e^2/2h$  wird durch die Ergebnisse bei kurzreichweitigen Potentialen ( $\lambda = 0$ ) und bei langreichweitigen Potentialen bis zu  $\lambda = 2\ell$  unterstützt.

Die numerischen Resultate zeigen, daß die eigentlich zu erwartenden *mesoskopischen Leitwertfluktuationen* bei kleinen aber endlichen Temperaturen *unterdrückt* werden können, ohne daß das Skalenverhalten zusammenbricht. Die Rolle der Temperatur spielt in der numerischen Rechnung der kleine, aber nicht verschwindende Infinitesimalparameter in der Green-Funktion. Wegen dieses Unterdrückungsmechanismus sollte die direkte Messung des kritischen Exponenten  $\eta'$  in einer *experimentellen* Finite-Size-Scaling-Analyse bei einem Tieftemperaturexperiment genauso möglich sein, wie die (bereits erfolgreiche) Bestimmung von  $\nu$ .

Die Untersuchung der *dynamischen Leitfähigkeit* zeigt, im Falle langreichweitiger Impurity-Potentiale, die Existenz zweier scharf voneinander abgegrenzter Bereiche:

Bei kleinen Frequenzen liegt das *Regime der anomalen Diffusion* vor, in dem sich die endliche Systemgröße bemerkbar macht und  $\sigma_{xx}(\omega, L)$  Skalenverhalten in  $(\omega L^2)^{\eta''}$  im Limes  $\omega L^2 \rightarrow 0$  aufweist. In diesem Bereich spielt die multifraktale Natur der Wellenfunktionen eine Rolle. Bei kurzreichweitigen Potentialen kann  $\eta'' = 2 - \eta/2 = 1.81 \pm 0.05$  genau bestimmt werden und liefert einen konsistenten Wert für  $\eta$ . Bei langreichweitigen Potentialen ist das numerische Resultat für  $\eta''$  nicht so zuverlässig, aber verträglich mit dem Wert bei kurzer Reichweite.

Durch einen relativ klar definierten Übergang getrennt, schließt sich das *semiklassische Regime* an, in dem die frequenzabhängige Leitfähigkeit bei langreichweitigen Potentialen *linear* vom Fixpunktwert abfällt. Die Geschwindigkeitskorrelation weist deshalb in der Zeit einen *Long-Time-Tail* mit der Potenz  $t^{-2}$  auf. Dasselbe Potenzgesetz findet man bereits im semiklassischen (Hochfeld-)Modell. Aus der *Stabilität der Long-Time-Tails* gegenüber quantenmechanischen Korrekturen kann geschlossen werden, daß bei niedrigen Frequenzen, in einem breiten Bereich, eine meßbare Abweichung vom konventionellen Drude-Verhalten auch *experimentell* sichtbar sein sollte.

Die Rekursionsmethode wurde auch auf das *eindimensionale Anderson-Modell* angewandt. Dort konnte das *Mottsche*  $\omega^2 \ln^2 \omega$ -Verhalten im Limes kleiner Frequenzen präzise nachgewiesen werden. Es wird gezeigt, daß dazu tatsächlich größere Systeme ( $N \gtrsim 10^8$ ) nötig sind, als bislang angenommen wurde. Der Einfluß des Infinitesimalparameters muß dabei genau kontrolliert werden. Schon bei sehr schwacher Unordnung können Abweichungen von der asymptotisch exakten Theorie von V. L. Berezinskii nachgewiesen werden. Die Iterationsmethode kann also als Prüfstein für analytische Vorhersagen bei beliebiger Unordnung verwendet werden.

In dieser Arbeit wurde auch eine andere, auf der Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung beruhende *streutheoretische Methode* verwendet, um aus der Berechnung der vollständigen (Quanten-Hall-)Wellenfunktion in der Nähe des kritischen Füllfaktors Aussagen über die statische, *diagonale Leitfähigkeit* und den *Hall-Winkel* zu gewinnen. Die berechneten Wellenfunktionen zeigen das aus Diagonalisierungsrechnungen bekannte multifraktale Spektrum. Die berechnete statische Leitfähigkeit ist mit den Präzisionsdaten aus dem Rekursionsverfahren verträglich, kann aber aufgrund der beschränkten Systemgrößen nicht dieselbe Genauigkeit erreichen. Die streutheoretische Methode eröffnet jedoch die Möglichkeit den Hall-Winkel direkt aus der Wellenfunktion zu berechnen.



# A

## Hinweise zur numerischen Lösung der Gleichungen von Berezinskii

**B**erezinskii konnte für die dynamische Leitfähigkeit im eindimensionalen Zufallspotential eine analytische Lösung<sup>22</sup> finden, die im Limes schwacher Unordnung ( $\varepsilon_F \tau / \hbar \gg 1$ ) und schwacher Streuung (d. h. die Bornsche Näherung gilt für jeden Streuer) asymptotisch exakt wird. Diese kann jedoch nicht geschlossen, sondern nur in Form zweier linearer, gekoppelter Rekursionsgleichungen angegeben werden. Der dissipative Anteil der dynamischen Leitfähigkeit wird ausgedrückt durch

$$\operatorname{Re} \sigma(\omega \tau) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_0 \operatorname{Re} \sum_{m=0}^M Q_m (R_m - R_{m+1}),$$

wobei  $\sigma_0 = ne^2 \tau / m$  die Leitfähigkeit und  $\tau$  die Relaxationszeit der Elektronen im Drude-Modell ist. Mit der Abkürzung  $\nu = 4\omega \tau$  erhält V. L. Berezinskii die Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} R_{m-1} &= 2R_m - \frac{i\nu}{m} R_m - R_{m+1} \\ Q_{m-1} &= Q_m - \frac{1}{m^2} \left( i\nu \left( m + \frac{1}{2} \right) Q_m + (m+1)^2 (Q_{m+1} - Q_m) + R_m - R_{m+1} \right), \end{aligned}$$

Die Randbedingungen sind  $R_0 = 1$  und  $\frac{i\nu}{2} Q_0 + Q_1 - Q_0 + R_0 - R_1 = 0$ . Für die numerische Lösung erweist sich der folgende Algorithmus<sup>56</sup> als stabil:

Bei der ersten Gleichung startet man für jedes  $\nu$  mit beliebigen Anfangswerten, z.B.  $R_M = 1$  und  $R_{M+1} = 0$ , und führt eine Abwärtsrekursion  $m = M \dots 1$  durch. Anschließend reskaliert man die Lösungen  $R_m$  aus der homogenen linearen Iteration, d. h. man dividiert alle erhaltenen  $R_m$  durch  $R_0$ .

Mit der zweiten Gleichung verfährt man analog. Man berechnet rekursiv mit den Anfangswerten  $Q_M = 1$  und  $Q_{M+1} = 0$  alle  $Q_m$  ( $m = M \dots 1$ ) für die inhomogene, sowie für die homogene lineare Iterationsgleichung (d. h. mit den Termen  $R_m = 0$  gesetzt). Um die Randbedingung zu erfüllen subtrahiert man anschließend die mit  $(\frac{i\nu}{2} Q_0 + Q_1 - Q_0 + R_0 - R_1) / (\frac{i\nu}{2} Q_0 + Q_1 - Q_0)$  multiplizierten Lösungen der homogenen Gleichung von denen der inhomogenen Gleichung.

Die Wahl der Obergrenze  $M$  in der Summation wird durch den Wert von  $\nu$  bestimmt. Mit  $M = a/\nu + b$  und  $a \approx 5$ ,  $b \approx 5$  erhält man auch für kleinste  $\omega \tau \approx 2 \times 10^{-5}$  noch numerisch stabile und exakte Lösungen (64-Bit-Gleitpunkt-Arithmetik).

# B

## Hinweise zur Numerik

### Random-Generatoren

Da in jeder Berechnung etwa  $2 \times N \times M \approx 10^8$  Zufallszahlen für die Erzeugung der Random-Matrixelemente benötigt werden, erreicht man schnell den Bereich, in dem bei gängigen Pseudo-Random-Generatoren (z.B. Systemgeneratoren) die Korrelationen aufgrund einer endlichen Periodenlänge wichtig werden. Es müssen in jedem Fall bessere Generatoren verwendet werden. Hier erwies sich der portierbare Generator `ran2` von W. H. Press und B. P. Flannery<sup>140</sup> als zuverlässig. Dieser ist zwar nicht sehr effizient, wurde jedoch in ausgiebigen Tests<sup>116</sup> als sicher eingestuft. Die Autoren setzen zwar 1000\$, für denjenigen, der Korrelationen in `ran2` entdeckt — dies stellt allerdings noch kein Zuverlässigkeitskriterium an sich dar...

Auf *keinen Fall* dürfen die völlig untauglichen Generatoren aus den älteren Ausgaben der *Numerical Recipes*<sup>139</sup> eingesetzt werden, da diese zu periodischen Strukturen in den Stromkorrelationsfunktionen führen! (Man vergleiche auch mit Referenz<sup>159</sup>).

### Rechenzeiten

Das Iterationsverfahren für die dynamische Leitfähigkeit ist bereits erheblich komplexer und damit zeitaufwendiger als zum Beispiel die Berechnung der Lokalisierungslänge mittels der Transfermatrixmethode. Der Speicherbedarf stellt bei dem Iterationsverfahren kein Problem dar. Alle Rechnungen wurden in doppelter Genauigkeit, d. h. mit 64-Bit-Gleitpunkt-Arithmetik nach ANSI/IEEE Standard 754 (etwa 15.5 Dezimalstellen), durchgeführt. Auf einer Workstation vom Typ DEC Alpha 3000-600 zum Beispiel erreichte die Rechenleistung etwa  $10^5$  Iterationen/80 Std. bei einer Matrixdimension von  $M = 45$ . Die Leistung dieser Workstation dürfte etwas höher liegen als die skalare Rechenleistung einer Cray Y-MP 4/432. Die Berechnungen wurden meist parallel auf mehreren Maschinen des Workstation-Clusters durchgeführt.

# Literaturverzeichnis

in alphabetischer Ordnung

- [1] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Liccardello, T. V. Ramakrishnan: *Scaling Theory of Localisation: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- [2] A. A. Abrikosov, I. A. Ryzhkin: *Conductivity of quasi-one-dimensional metal systems*, Adv. Phys. **27**, 147 (1978).
- [3] R. C. Albers, J. E. Gubernatis: *ac conductivity of a one-dimensional site-disordered lattice*, Phys. Rev. B **17**, 4487 (1978).
- [4] P. W. Anderson: *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
- [5] T. Ando, Y. Uemura: *Theory of Quantum Transport in a Two-Dimensional Electronic System under Magnetic Fields*, Part I: J. Phys. Soc. Jap. **36**, 959 (1974), Part II: J. Phys. Soc. Jap. **36**, 1521 (1974), Part III: J. Phys. Soc. Jap. **37**, 622 (1974), Part IV: J. Phys. Soc. Jap. **37**, 1233 (1974).
- [6] T. Ando, H. Aoki: *Effect of Localization on the Hall Conductivity in the Two-Dimensional System in Strong Magnetic Fields*, Solid State Commun. **38**, 1079 (1981).
- [7] T. Ando, A. B. Fowler, F. Stern: *Electronic properties of two-dimensional systems*, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982).
- [8] T. Ando: *Electron Localisation in a Two-Dimensional System*, Part I: J. Phys. Soc. Jap. **52**, 1740 (1983), Part II: J. Phys. Soc. Jap. **53**, 3101 (1984), Part III: J. Phys. Soc. Jap. **53**, 3126 (1984).
- [9] T. Ando, H. Aoki: *Finite-Size Scaling Study of Localization in Landau Levels*, J. Phys. Soc. Jap. **54**, 2238 (1985).
- [10] T. Ando: *Scaling Functions in Quantum Hall Effect*, J. Phys. Soc. Jap. **55**, 3199 (1986).
- [11] H. Aoki: *Computer Simulation of Two-Dimensional Disordered Electron Systems in Strong Magnetic Fields*, J. Phys. C **10**, 2583 (1977).
- [12] H. Aoki: *Transport Properties of Two-Dimensional Disordered Electron Systems in Strong Magnetic Fields*, J. Phys. C **11**, 3823 (1978).
- [13] H. Aoki: *Critical behaviour of extended states in disordered systems*, J. Phys. C **16**, L205 (1983).
- [14] H. Aoki, T. Ando: *Critical Localization in Two-Dimensional Landau Quantization*, Phys. Rev. Lett. **54**, 831 (1985).
- [15] H. Aoki: *Fractal dimensionality of wave functions at the mobility edge: Quantum fractal in the Landau levels*, Phys. Rev. B **33**, 7310 (1986).
- [16] H. Aoki, T. Ando: *Universality of Quantum Hall Effect: Topological Invariant and Observable*, Phys. Rev. Lett. **57**, 3093 (1986).
- [17] H. Aoki: *Quantised Hall effect*, Rep. Prog. Phys. **50**, 655 (1987).
- [18] W. Apel: *Dynamic conductivity for a disordered 2D electron system in a strong magnetic field*, J. Phys. C **47**, 9387 (1989).
- [19] J. E. Avron, R. Seiler: *Quantization of the Hall Conductance for General, Multiparticle Schrödinger Hamiltonians*, Phys. Rev. Lett. **54**, 259 (1985).
- [20] J. Balatoni, A. Reyni, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci **1**, 9 (1959), English translation in: *The selected Papers of A. Reyni*, Vol. 1, S. 588, Akademia Budapest, Budapest, 1976.
- [21] H. U. Baranger, A. D. Stone: *Electrical linear-response theory in an arbitrary magnetic field: A new Fermi-surface formation*, Phys. Rev. B **40**, 8169 (1989).

- [22] V. L. Berezinskiĭ: *Kinetics of a quantum particle in a one-dimensional random potential*, Sov. Phys. JETP. **38**, 620 (1974), ЖЭТФ **65**, 1251 (1973).
- [23] M. Bockstedte, S. F. Fischer: *Localization phase diagram for a disordered system in a magnetic field in two dimensions*, J. Phys. Condens. Matter **5**, 6043 (1993).
- [24] T. Brandes, L. Schweitzer, B. Kramer: *Multifractal Wave Functions and Inelastic Scattering in the Integer Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **72**, 3582 (1994).
- [25] W. Brenig: *Quantized Hall Conductance: Effect of Random Potentials*, Z. Phys. B **50**, 305 (1983).
- [26] W. Brenig, K. I. Wysokiński: *Scattering Approach to the von Klitzing Effect*, Z. Phys. B **63**, 149 (1986).
- [27] W. Brenig: *Statistical Theory of Heat: Nonequilibrium Phenomena*, Springer, New York, 1989.
- [28] E. Brézin, D. J. Gross, C. Itzykson: *Density of States in the Presence of a Strong Magnetic Field and Random Impurities*, Nucl. Phys. B **235**, 24 (1984).
- [29] B. R. Bulka, B. Kramer, A. MacKinnon: *Mobility Edge in the Three Dimensional Anderson Model*, Z. Phys. B **60**, 13 (1985).
- [30] A. Bunde, S. Havlin, H. E. Roman: *Multifractal features of random walks on random fractals*, Phys. Rev. A **42**, 6274 (1990).
- [31] A. Bunde, S. Havlin: *Fractals and Disordered Systems*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.
- [32] R. L. Bush: *Dielectric function for a disordered one-dimensional conductor*, Phys. Rev. B **13**, 805 (1976).
- [33] M. Büttiker: *Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors*, Phys. Rev. B **38**, 9375 (1988).
- [34] C. Castellani, L. Peliti: *Multifractal wavefunction at the localization threshold*, J. Phys. A **19**, L429 (1986).
- [35] J. T. Chalker: *Anderson localisation in quantum Hall systems*, J. Phys. C **20**, L493 (1987).
- [36] J. T. Chalker, P. Carra, K. A. Benedict: *Weak Localization and the Integer Quantum Hall Effect*, Europhys. Lett. **5**, 163 (1988).
- [37] J. T. Chalker, P. D. Coddington: *Percolation, quantum tunneling and the integer Hall effect*, J. Phys. C **21**, 2665 (1988).
- [38] J. T. Chalker: *Scaling and correlations at the mobility edge in two dimensions*, J. Phys. C **21**, L119 (1988).
- [39] J. T. Chalker, G. J. Daniell: *Scaling, Diffusion, and the Integer Quantized Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **61**, 593 (1988).
- [40] J. T. Chalker: *Scaling and Eigenfunction Correlations near a Mobility Edge*, Physica (Amsterdam) **167A**, 253 (1990).
- [41] J. T. Chalker, G. J. Daniell, S. N. Evangelou, I. H. Nahm: *Eigenfunction fluctuations and correlations at the mobility edge in a two-dimensional system with spin-orbit scattering*, J. Phys. Condens. Matter **5**, 485 (1993).
- [42] A. Chhabra, R. V. Jensen: *Direct Determination of the  $f(\alpha)$  Singularity Spectrum*, Phys. Rev. Lett. **62**, 1327 (1989).
- [43] K. B. Efetov, V. G. Marikhin: *Effect of impurities on electron motion in two dimensions in a strong magnetic field*, Phys. Rev. B **40**, 12126 (1989).
- [44] L. W. Engel, D. Shahar, Ç. Kurdak, D. C. Tsui: *Microwave Frequency Dependence of Integer Quantum Hall Effect: Evidence for Finite-Frequency Scaling*, Phys. Rev. Lett. **71**, 2638 (1993).
- [45] F. Evers, W. Brenig: *Long time tails in the Quantum Hall Effect. A classical trajectory study*, Z. Phys. B **94**, 155 (1994).
- [46] U. Fastenrath, G. Adams, R. Bundschuh, T. Hermes, B. Raab, I. Schlosser, T. Wehner, T. Wichmann: *Universality in the 2d Localization Problem*, Physica A **172**, 302 (1991).
- [47] U. Fastenrath: *Localization properties of 2D systems with spin-orbit coupling: new numerical*

- results, *Physica A* **189**, 27 (1992).
- [48] D. M. Finlayson (Hrsg.): *Localisation and Interaction*, Proceedings of the 31st Scottish Universities Summer School in Physics, 1986.
- [49] D. S. Fisher, P. A. Lee: *Relation between conductivity and transmission matrix*, *Phys. Rev. B* **12**, 6851 (1981).
- [50] P. F. Fontein, P. Hendriks, F. A. P. Blom, J. H. Wolter, L. J. Giling, C. W. J. Beenakker: *Spatial potential distribution in GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As heterostructures under quantum Hall conditions studied with the linear electro-optic effect*, *Surf. Sci.* **263**, 91 (1992).
- [51] B. M. Gammel, S. F. Fischer: *Localisation Phase Diagram for a Disordered Two-Dimensional System in a Magnetic Field*, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2919 (1991).
- [52] B. M. Gammel, W. Brenig: *Scaling of the Static Conductivity in the Quantum Hall Effect*, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3286 (1994).
- [53] W. Gautschi: *Efficient computation of the complex error function*. *SIAM J. Numer. Anal.* **7**, 187 (1970); *Algorithm 363, complex error function*, *Comm. ACM* **12**, 635 (1969); K. S. Kölbig: *Certification of Algorithm 363*, *Comm. ACM* **15**, 465 (1972).
- [54] P. G. de Gennes, P. Lafore, J. P. Millot: *Sur un exemple de propagation dans un milieu désordonné*, *Journal de Physique et le Radium* **20**, 624 (1959).
- [55] R. R. Gerhardts: *Path-Integral Approach to the Two-Dimensional Magneto-Conductivity Problem*, Part I: *Z. Phys. B* **21**, 275 (1975), Part II: *Z. Phys. B* **21**, 285 (1975).
- [56] A. A. Gogolin, V. I. Melnikov: *Frequency Dependences of Conductivity and Dielectric Permeability of a One-Dimensional Disordered Conductor*, *Phys. Stat. Sol. b* **88**, 377 (1978).
- [57] P. Grassberger, I. Procaccia: *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*, *Physica (Amsterdam)* **9D**, 189 (1983), *Dimensions and Entropies of Strange Attractors from Fluctuating Dynamics Approach*, *Physica (Amsterdam)* **13D**, 34 (1984).
- [58] J. Hajdu, B. Kramer: *Der Quanten-Hall-Effekt*, *Phys. Bl.* **41**, 401 (1985).
- [59] J. Hajdu, M. Janßen: *Zehn Jahre Quanten-Hall-Effekt - Wo steht die Theorie?*, *Phys. Bl.* **46**, 426 (1990).
- [60] E. H. Hall: *Am. J. Math.* **2**, 287 (1879).
- [61] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, B. I. Shraiman: *Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets*, *Phys. Rev. A* **33**, 1141 (1986).
- [62] A. Hartland, K. Jones, J. M. Williams, B. L. Gallagher, T. Galloway: *Direct Comparison of the Quantized Hall Resistance in Gallium Arsenide and Silicon*, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 969 (1991).
- [63] F. Hausdorff: *Dimension und äußeres Maß*, *Math. Ann.* **79**, 157 (1919).
- [64] H. G. E. Hentschel, I. Procaccia: *The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals and Strange Attractors*, *Physica (Amsterdam)* **8D**, 435 (1983).
- [65] S. Hikami: *Borel-Padé analysis for the two-dimensional electron in a random potential under a strong magnetic field*, *Phys. Rev. B* **29**, Rapid Comm., 3726 (1984).
- [66] S. Hikami, E. Brézin: *Anderson localization in a spatially correlated random potential under a strong magnetic field*, *J. Physique* **46**, 2021 (1985).
- [67] S. Hikami: *Localization Length and Inverse Participation Ratio of Two Dimensional Electron in the Quantum Hall Effect*, *Prog. Theor. Phys.* **76**, 1210 (1986).
- [68] B. Huckestein, B. Kramer: *New Model for Localization in Strong Magnetic Field*, *Sol. St. Comm.* **71**, 445 (1989).
- [69] B. Huckestein, B. Kramer: *One-Parameter Scaling in the Lowest Landau Band: Precise Determination of the Critical Behavior of the Localization Length*, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1437 (1990).
- [70] B. Huckestein: *One-Parameter Scaling in the Lowest Landau Band*, *Physica A* **167**, 175 (1990).
- [71] B. Huckestein, L. Schweitzer: *Multifractality and Scaling in Disordered 2-D Landau Levels*, in: *Proceedings of the International Conference on Physics in Two Dimensions*, *Helv. Phys. Acta* **65**, 317 (1992).

- [72] B. Huckestein: *Scaling and Universality in the Integer Quantum Hall Effect*, Europhys. Lett. **20**, 451 (1992).
- [73] B. Huckestein, B. Kramer, L. Schweitzer: *Characterization of the electronic states near the centres of the Landau bands under quantum Hall conditions*, Surf. Sci. **263**, 125 (1992).
- [74] B. Huckestein, L. Schweitzer: *Relation between the Correlation Dimension of Multifractal Wave Functions and Spectral Measures in Integer Quantum Hall Systems*, Phys. Rev. Lett. **72**, 713 (1994).
- [75] B. Huckestein: *Corrections to Scaling in the Integer Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **72**, 1080 (1994).
- [76] M. Hund: *Percolation in a symmetric random potential*, Physica A **175**, 239 (1991).
- [77] Y. Huo, R. N. Bhatt: *Current Carrying States in the Lowest Landau Level*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1375 (1992).
- [78] Y. Huo, E. Hetzel, R. N. Bhatt: *Universal Conductance in the Lowest Landau Level*, Phys. Rev. Lett. **70**, 481 (1993).
- [79] M. Janßen: Beitrag beim *Workshop Quantum Hall Effect and Related Problems*, Leipzig, July 13-17, 1992.
- [80] M. Janßen, O. Viehweger, U. Fastenrath, J. Hajdu (Hrsg.): *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, New York, 1994.
- [81] R. Johnston, H. Kunz: *The conductance of a disordered wire*, J. Phys. C **16**, 3895 (1983).
- [82] R. Joynt: *Conditions for the quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **29**, 3303 (1984).
- [83] R. Joynt: *Theory of the AC breakdown of the quantum Hall effect*, J. Phys. C **18**, L331 (1985).
- [84] D. E. Khmel'nitskiĭ: *Quantization of Hall conductivity*, JETP. Lett. **38**, 553 (1983), Письма в ЖЭТФ **38**, 454 (1983).
- [85] S. Kirkpatrick, T. P. Eggarter: *Localized States of a Binary Alloy*, Phys. Rev. B **6**, 3598 (1972).
- [86] S. Kivelson, D. H. Lee, S. C. Zhang: *Global phase diagram in the quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **46**, 2223 (1992).
- [87] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper: *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [88] K. von Klitzing: *The quantized Hall effect*, Rev. Mod. Phys. **58**, 519 (1986).
- [89] S. Koch, R. J. Haug, K. von Klitzing, K. Ploog: *Size-Dependent Analysis of the Metal-Insulator Transition in the Integral Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **67**, 883 (1991).
- [90] S. Koch, R. J. Haug: *Experiments on scaling in  $Al_xGa_{1-x}As/GaAs$  heterostructures under quantum Hall conditions*, Phys. Rev. B **43**, 6828 (1991).
- [91] S. Koch: *Der Metall-Isolator-Übergang im Quanten-Hall-Effekt*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1991.
- [92] S. Koch, R. J. Haug, K. von Klitzing, K. Ploog: *Experimental studies of the localization transition in the quantum Hall regime*, Phys. Rev. B **46**, 1596 (1992).
- [93] S. Koch, R. J. Haug, K. von Klitzing, K. Ploog: *Direct measurement of critical exponents in the quantum Hall regime*, Surf. Sci. **263**, 108 (1992).
- [94] A. N. Kolmogorov: *Entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **124**, 754 (1959), Math. Rev. **21**, 2035 (1959).
- [95] B. Kramer, L. Schweitzer, A. MacKinnon: *Density of States of a Two-Dimensional Electron in a Strong Magnetic Field and a Random Potential*, Z. Phys. B **56**, 297 (1984).
- [96] B. Kramer, A. MacKinnon: *Localization: theory and experiment*, Rep. Prog. Phys. **56**, 1469 (1993).
- [97] P. Kratzer: *Wellenpaketverfahren für zweidimensionale Potentiale: Vibrationsdynamik bei Oberflächenreaktionen und Quanten-Hall-Effekt*, Dissertation, Technische Universität München, 1993.
- [98] P. Kratzer, W. Brenig: *Long time tails in the Quantum Hall Effect. A numerical wave packet*

- study*, Z. Phys. B **94**, 147 (1994).
- [99] R. Kubo: *The fluctuation-dissipation theorem*, Rep. Prog. Phys. **29**, 255 (1966).
- [100] F. Kuchar, R. Meisels, G. Weinmann, W. Schlapp: *Microwave Hall conductivity of the two-dimensional electron gas in GaAs-Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As*, Phys. Rev. B **33**, Rapid Comm., 2965 (1986).
- [101] G. Landwehr: *The Discovery of the Quantum Hall Effect*, in: Festkörperprobleme XXVI, 17 (1986).
- [102] G. Landwehr (Hrsg.): *High Magnetic Fields in Semiconductor Physics*, Springer Series in Solid State Sciences, Bd. 71, Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [103] G. Landwehr (Hrsg.): *High Magnetic Fields in Semiconductor Physics III*, Springer Series in Solid State Sciences, Bd. 101, Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [104] R. B. Laughlin: *Quantized Hall conductivity in two dimensions*, Phys. Rev. B **23**, Rapid Comm., 5632 (1981).
- [105] D. H. Lee, S. Kivelson, S. C. Zhang: *Quasiparticle Charge and the Activated Conductance of a Quantum Liquid* Phys. Rev. Lett. **68**, 2386 (1992).
- [106] D. H. Lee, Z. Wang, S. Kivelson: *Quantum Percolation and Plateau Transitions in the Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **70**, 4130 (1993).
- [107] H. Levine, S. B. Libby, A. M. M. Pruisken: *Electron Delocalization by a Magnetic Field in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **51**, 1915 (1983).
- [108] D. Liu, S. das Sarma: *Universality in Two-Dimensional Landau Level Localization*, Mod. Phys. Lett. **B7**, 449 (1993).
- [109] S. Luryi, R. F. Kazarinov: *Theory of quantized Hall effect at low temperatures*, Phys. Rev. B **27**, Rapid Comm., 1386 (1983).
- [110] A. MacKinnon: *The conductivity of the one-dimensional disordered Anderson model: a new numerical method*, J. Phys. C **13**, L1031 (1980).
- [111] A. MacKinnon: *One Parameter Scaling of Localization Length and Conductance in Disordered Systems*, Phys. Rev. Lett. **47**, 1546 (1981).
- [112] A. MacKinnon, B. Kramer: *The Scaling Theory of Electrons in Disordered Solids: Additional Numerical Results*, Z. Phys. B **53**, 1 (1983).
- [113] A. MacKinnon: *The Calculation of Transport Properties and Density of States of Disordered Solids*, Z. Phys. B **59**, 385 (1985).
- [114] A. MacKinnon: *Critical Exponents for the Metal-Insulator Transition in Disordered Systems*, Preprint cond-mat/9312024.
- [115] B. B. Mandelbrot: J. Fluid Mech. **62**, 331 (1974).
- [116] G. Marsaglia, A. Zaman: *Some portable very-long-period random number generators*, Computers in Physics, Vol. 8, No. 1, Jan/Feb, 117 (1994).
- [117] F. Matta, A. Reichel: *Uniform Computation of the Error Function and Other Related Functions*, Math. Comp. **25**, 339 (1971).
- [118] P. L. McEuen, A. Szafer, C. A. Richter, B. W. Alphenaar, J. K. Jain, A. D. Stone, R. G. Wheeler: *New Resistivity for High-Mobility Quantum Hall Conductors*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2062 (1990).
- [119] B. Mieck: *Nonuniversal Delocalization in a Strong Magnetic Field*, Europhys. Lett. **13**, 453 (1990).
- [120] B. Mieck, H. A. Weidenmüller: *How does a strong magnetic field destroy localization in two-dimensional disordered systems?*, Z. Phys. B **84**, 59 (1991).
- [121] B. Mieck: *Delocalization transition of two-dimensional disordered systems in a strong magnetic field*, Z. Phys. B **90**, 427 (1993).
- [122] G. V. Mil'nikov, I. M. Sokolov: *Semiclassical Localisation in a Magnetic Field*, JETP. Lett. **48**, 536 (1988), Письма в ЖЭТФ **48**, 494 (1988).
- [123] C. Morgenstern: *Galgenlieder*, 1905.
- [124] N. F. Mott, W. D. Twose: *The Theory of Impurity Conduction*, Adv. Phys. **10**, 107 (1961).

- [125] N. F. Mott: *Electrons in Disordered Structures*, Adv. Phys. **16**, 49 (1967).
- [126] N. F. Mott: *Conduction in Non-crystalline Systems. IV. Anderson Localization in a disordered Lattice*, Phil. Mag. **22**, 7 (1970).
- [127] H. Nii, M. Ohsawa, S. Komiyama, S. Fukatsu, Y. Shiraki, R. Itoh: *Geometry-dependent resistances of two-dimensional electron gas at high magnetic fields*, Surf. Sci **263**, 275 (1992).
- [128] Q. Niu, D. J. Thouless, Y. Wu: *Quantized Hall conductance as a topological invariant*, Phys. Rev. B **31**, 3372 (1985).
- [129] Y. Ono: *Localization of Electrons under Strong Magnetic Fields in a Two-Dimensional System*, J. Phys. Soc. Jap. **51**, 237 (1982).
- [130] Y. Ono: *Energy Dependence of Localization Length of Two-Dimensional Electron System Moving in a Random Potential under Strong Magnetic Fields*, J. Phys. Soc. Jap. **51**, 2055 (1982).
- [131] Y. Ono, T. Ohtsuki, B. Kramer: *Analysis of Two Dimensional Electronic States in Strong Magnetic Field by Random Matrix Model*, J. Phys. Soc. Jap. **60**, 270 (1991).
- [132] Y. Ono, S. Fukada: *Study of Quantum Hall Effect by Random Matrix Model*, J. Phys. Soc. Jap. **61**, 1676 (1992).
- [133] M. A. Paalanen, D. C. Tsui, A. C. Gossard: *Quantized Hall effect at low temperatures*, Phys. Rev. B **25**, 5566 (1982).
- [134] G. Paladin, A. Vulpiani: *Anomalous Scaling Laws in Multifractal Objects*, Phys. Rep. **4**, 147 (1987).
- [135] J. L. Pichard, G. Sarma: *Finite size scaling approach to Anderson localisation*, Part I: J. Phys. C **14**, L127 (1981), Part II: J. Phys. C **14**, L617 (1981).
- [136] W. Pook, M. Janßen: *Multifractality and scaling in disordered mesoscopic systems*, Z. Phys. B **82**, 295 (1991).
- [137] R. E. Prange, R. Joynt: *Conduction in a strong field in two dimensions: The quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **25**, 2943 (1982).
- [138] R. E. Prange, S. M. Girvin (Hrsg.): *The Quantum Hall Effect*, Contemporary Physics, Springer, New York, 1987, 1992.
- [139] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1986.
- [140] W. H. Press, S. A. Teukolsky: *Portable Random Number Generators*, Computers in Physics, Vol. 6, No. 5, Sep/Oct, 522 (1992).
- [141] A. M. M. Pruisken: Beitrag beim *Workshop Quantum Hall Effect and Related Problems*, Leipzig, July 13-17, 1992.
- [142] P. S. Riseborough: *Frequency Dependent Conductivity of Random One-Dimensional Chains*, Z. Phys. B **51**, 173 (1983).
- [143] L. J. Root, J. D. Bauer, J. L. Skinner: *New approach to localization: Quantum connectivity*, Phys. Rev. B **37**, 5518 (1988).
- [144] H. Saleur, B. Duplantier: *Exact determination of the Percolation Hull Exponent in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2325 (1987).
- [145] B. Sapoval, M. Rosso, J. F. Gouyet: *The fractal nature of a diffusion front and the relation to percolation*, J. Physique Lett. **46**, L149 (1985).
- [146] T. Saso, C. I. Kim, T. Kasuya: *Numerical Simulation of the Dynamical Conductivity of One-Dimensional Disordered Systems by MacKinnon's Method*, J. Phys. Soc. Jap. **52**, 1888 (1983).
- [147] T. Saso: *Logarithmic frequency dependence of the dynamical conductivity of one-dimensional disordered systems at low frequencies: a computer simulation for a very long chain*, J. Phys. C **17**, 2905 (1984).
- [148] M. Schreiber: *Fractal Character of Eigenstates in Weakly Disordered Three Dimensional Systems*, Phys. Rev. B **31**, 6146 (1985).
- [149] M. Schreiber: *Numerical Evidence for Power-Law Localisation in Weakly Disordered Systems*,

- J. Phys. C **18**, 2493 (1985).
- [150] M. Schreiber: *Fractal eigenstates in disordered systems*, Physica A **167**, 188 (1990).
- [151] M. Schreiber, H. Grussbach: *Multifractal Wave Functions at the Anderson Transition*, Phys. Rev. Lett. **67**, 607 (1991).
- [152] M. Schreiber, H. Grussbach: *Multifractal Electronic Wave Functions in the Anderson Model of Localization*, Mod. Phys. Lett. B **6**, 851 (1992).
- [153] L. Schweitzer, B. Kramer, A. MacKinnon: *Magnetic field and electron states in two-dimensional disordered systems*, J. Phys. C **17**, 4111 (1984).
- [154] L. Schweitzer, B. Kramer, A. MacKinnon: *The Conductivity of a Two-Dimensional Electronic System of Finite Width in the Presence of a Strong Perpendicular Magnetic Field and a Random Potential*, Z. Phys. B **59**, 379 (1985).
- [155] R. R. P. Singh, S. Chakravarty: *A Disordered Two-Dimensional System in a Magnetic Field: Borel-Padé Analysis*, Nucl. Phys. B **265**, 165 (1986).
- [156] H. E. Stanley, P. Meakin: *Multifractal phenomena in physics and chemistry*, Nature **335**, 405 (1988).
- [157] H. Takayasu: *Fractals in the physical sciences*, Manchester University Press, Manchester, New York, 1990.
- [158] S. A. Trugman: *Localization, percolation and the quantum Hall effect*, Phys. Rev. B **27**, 7539 (1983).
- [159] I. Vattulainen, T. Ala-Nissila, K. Kankaala: *Physical Tests for Random Numbers in Simulations*, Phys. Rev. Lett. **73**, 2513 (1994).
- [160] O. Viehweger, K. B. Efetov: *Low-frequency behaviour of the kinetic coefficients in localization regimes in strong magnetic fields*, Phys. Rev. B **44**, 1168 (1991).
- [161] D. Vollhardt, P. Wölfle: *Diagrammatic, Self-Consistent Treatment of the Anderson Localization Problem in  $d \leq 2$* , Phys. Rev. B **22**, 4666 (1980).
- [162] R. F. Voss: *The fractal dimension of percolation cluster hulls*, J. Phys. A **17**, L373 (1984).
- [163] J. Wakabayashi, A. Fukano, S. Kawaji, Y. Koike, T. Fukase: *Experiments on Localization in Landau Subbands with the Landau Quantum Number 0 and 1 of Si Inversion Layers*, Surf. Sci. **229**, 60 (1990).
- [164] F. J. Wegner: *Electrons in Disordered Systems. Scaling Near the Mobility Edge*, Z. Phys. B **25**, 327 (1976).
- [165] F. J. Wegner: *Inverse Participation Ratio in  $2 + \epsilon$  Dimensions*, Z. Phys. B **36**, 209 (1980).
- [166] F. J. Wegner: *Exact Density of States for Lowest Landau Level in White Noise Potential Superfield Representation for Interacting Systems*, Z. Phys. B **51**, 279 (1983).
- [167] H. P. Wei, D. C. Tsui, A. M. M. Pruisken: *Localization and scaling in the quantum Hall regime*, Phys. Rev. B **33**, 1488 (1986).
- [168] K. I. Wysokiński, W. Brenig: *Wave functions of disordered two-dimensional electron gas in strong magnetic field*, Acta Physica Polonica A **80**, 469, 1991.
- [169] K. W. Yu: *Quantum transmission in periodic potentials: A transfer matrix approach*, Computers in Physics, Mar/Apr, 176 (1990).
- [170] R. Zallen, H. Scher: *Percolation on a Continuum and the Localization-Delocalization Transition in Amorphous Semiconductors*, Phys. Rev. B **4**, 4471 (1971).